

# 修士学位論文

## ミュオニウム基底状態超微細構造分光 の測定における不確かさの評価

令和四年度

相関基礎科学専攻

31-196946

山内 秀治



Evaluation of uncertainties in measurement  
of the muonium ground-state hyperfine structure



*The vanity of the sciences.—Physical science will not console me for the ignorance of morality in the time of affliction. <sup>\*1</sup>*

---

<sup>\*1</sup> Blaise Pascal, "Pascal's Pensées" Published in 1958 by E. P. Dutton Co., Inc.



# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	研究背景 . . . . .	1
1.2	先行実験の概要 . . . . .	3
1.3	研究目的 . . . . .	6
	1.3.1 MuSEUM 実験の目的 . . . . .	6
	1.3.2 本研究の目的 . . . . .	7
1.4	本論文の構成 . . . . .	8
<b>第 2 章</b>	<b>原理</b>	<b>9</b>
2.1	原理 . . . . .	9
2.2	HFS の理論 . . . . .	11
2.3	ミュオニウム生成 . . . . .	12
2.4	固有状態 . . . . .	14
	2.4.1 高磁場測定 . . . . .	16
2.5	ミュオン崩壊 . . . . .	16
2.6	共鳴曲線 . . . . .	20
	2.6.1 Conventional 法 . . . . .	22
<b>第 3 章</b>	<b>実験</b>	<b>23</b>
3.1	MuSEUM 実験の原理 . . . . .	23
3.2	実験装置 . . . . .	24
	3.2.1 マイクロ波システム . . . . .	24
	3.2.2 マイクロ波共振器 . . . . .	25
	3.2.3 標的気体容器 . . . . .	26
	3.2.4 陽電子検出器 . . . . .	27
	3.2.5 超伝導電磁石 . . . . .	27
	3.2.6 ビームモニター . . . . .	28

<b>第4章</b>	<b>シミュレーション</b>	<b>29</b>
4.1	シミュレーション . . . . .	30
4.1.1	手続き 1 . . . . .	30
4.1.2	手続き 2 . . . . .	32
4.1.3	手続き 3 . . . . .	39
4.1.4	手続き 4 . . . . .	40
4.1.5	手続き 5 . . . . .	45
4.2	Figure of Merit . . . . .	45
4.3	シミュレーションの妥当性 . . . . .	48
4.3.1	Conventional 法 . . . . .	48
4.3.2	Old Muonium 法 . . . . .	49
4.4	統計的不確かさ . . . . .	52
4.4.1	Conventional 法 . . . . .	52
4.4.2	Old Muonium 法 . . . . .	52
<b>第5章</b>	<b>曲線フィッティングエラー</b>	<b>57</b>
5.1	磁場不均一性 . . . . .	57
5.1.1	Conventional 法 . . . . .	57
5.1.2	Old Muonium 法 . . . . .	59
5.2	ミュオン静止位置分布 . . . . .	60
5.2.1	Conventional 法 . . . . .	60
5.2.2	Old Muonium 法 . . . . .	60
5.3	マイクロ波パワー . . . . .	63
5.3.1	Conventional 法 . . . . .	63
5.3.2	Old Muonium 法 . . . . .	64
5.4	磁気プローブの絶対精度 . . . . .	66
5.5	Bloch-Siegert 項 . . . . .	67
5.6	非共鳴状態 . . . . .	67
<b>第6章</b>	<b>圧力外挿エラー</b>	<b>69</b>
6.1	密度のキャリブレーション . . . . .	69
6.2	クリプトンの温度変動 . . . . .	70
6.3	クリプトンの圧力変動 . . . . .	71
6.4	圧力計の精度 . . . . .	72
6.5	二次の圧力シフト . . . . .	73

---

6.6	不純物 . . . . .	74
<b>第 7 章</b>	<b>結論と展望</b>	<b>79</b>
7.1	結論 . . . . .	79
7.1.1	マイクロ波パワーの最適値 . . . . .	79
7.1.2	高磁場実験の不確かさ . . . . .	80
7.2	展望・課題 . . . . .	81
7.2.1	$\mu_\mu/\mu_p$ の不確かさ . . . . .	81
7.2.2	非共鳴状態の寄与 . . . . .	81
7.2.3	高磁場測定 . . . . .	82
7.2.4	ラムゼー共鳴法の不確かさ . . . . .	82
	参考文献	83
	Appendix A 検出器の立体角	85
	Appendix B ラムゼー共鳴法	87
	謝辞	91



# 目次

1.1	水素様原子のエネルギー準位図の模式図。 . . . . .	2
1.2	LAMPF での実験のセットアップ図 [1]。 . . . .	5
1.3	ミュオンの異常磁気モーメントの実験値 [9] と理論値 [10] の比較。両者の間には $4.2\sigma$ の乖離が認められている。 . . . .	7
2.1	ゼーマン効果によってトリプレット状態の縮退がとける様子を表す Breit-Rabi 図。高磁場測定の場合、 $\nu_{12}$ と $\nu_{34}$ の和がミュオニウムの超微細構造 $\Delta\nu$ に相当する。 . . . .	10
2.2	弱い相互作用によるパイ中間子の自然崩壊。 $p, s$ は粒子の運動量とスピンをそれぞれ表している。パリティ対称性の破れにより、左巻きのニュートリノとミュオンしか生成されない。 . . . .	13
2.3	ミュオニウムの状態振幅の時間発展。ミュオニウム形成後の約 $12 \mu\text{s}$ にほぼ全てのミュオンが崩壊する。TM <sub>210</sub> モードの場合、 $P_1 \simeq P_3, P_2 \simeq P_4$ となる。 . . . .	17
2.4	単位時間あたりの崩壊陽電子 ( $y$ : threshld Energy) の空間密度分布。左図はマイクロ波パワーを 230 kHz 印加した際の分布、右図はマイクロ波パワーを印加しない場合の分布を表している。 . . . .	18
2.5	単位時間あたりの崩壊陽電子 ( $y$ : maximum) の空間密度分布。 . . . .	18
2.6	陽電子のエネルギー分布。 $y_0 = 0.66$ のとき、観測確率は約 73% である。 . . . .	19
2.7	ミュオンの $z$ 方向のスピンの平均値。時間の経過にしたがってスピンの緩和がする。 . . . .	20
2.8	$P_z = 1$ としたときの崩壊陽電子の角度分布。 . . . .	21
2.9	陽電子の検出割合。 $y_0 = 0.66$ のとき、全体の約 61% を観測できる。 . . . .	21
3.1	ミュオニウムの超微細構造分光実験のためのセットアップ。 . . . .	23
3.2	MuSEUM 高磁場実験のマイクロ波システム。 . . . .	24

3.3	高磁場測定用マイクロ波共振器 (内径 187 mm, 長さ 304 mm)。TM <sub>110</sub> モードと TM <sub>210</sub> モードで共鳴するように設計されている。入力用のポートが 2 つ、ピックアップ用のポートが 1 つ、チューニングバーのためのポートが 2 つ計 5 つのポートがある。前面と後面にはビームと陽電子を通過させるための銅製フォイルがあり、その厚さは 25 $\mu\text{m}$ である [28]。 . . . . .	26
3.4	クリプトンガスチェンバー。左図 と右図はそれぞれチェンバーの前面と後面を表している。共振器のパワー調整及びチューニング、水冷装置、温度計と NMR 磁気プローブ、排気系等のためのポートがついている [28]。 . . . . .	26
3.5	陽電子検出器 [29]。 . . . . .	27
3.6	超伝導電磁石。 . . . . .	28
4.1	Geant4 シミュレーション (Green: $\mu^+$ , Red: $e^+$ , Yellow: $\nu_e, \bar{\nu}_\mu$ )。 . . . . .	31
4.2	ビーム軸方向のミュオン静止位置分布。共振器の上流フォイルから約 91 mm の位置に静止する。 . . . . .	31
4.3	マイクロ波共振器内の静止ミュオンの $xy$ 分布。 . . . . .	32
4.4	磁石がマイクロ波共振器の $z = 0$ mm 断面につくる磁場。 . . . . .	33
4.5	ミュオン静止位置分布から計算した磁石磁場の度数分布図。 . . . . .	34
4.6	MuSEUM 高磁場マイクロ波共振器がつくる TM <sub>110</sub> モード磁場 ( $P = 20$ W, $Q = 20000$ )。 . . . . .	36
4.7	MuSEUM 高磁場マイクロ波共振器がつくる TM <sub>210</sub> モード磁場 ( $P = 120$ W, $Q = 20000$ )。 . . . . .	36
4.8	ミュオン静止位置分布から計算した $b_{12}$ の度数分布図。 . . . . .	37
4.9	ミュオン静止位置分布から計算した $b_{34}$ の度数分布図。 . . . . .	38
4.10	TM <sub>110</sub> モードのランファイルの内容 (0~5 番目のエントリまでを取り出した)。三列目と五列目は崩壊ミュオンと陽電子の 4 元ベクトル ( $t, x, y, z$ ) である。四列目と六列目は崩壊ミュオンと陽電子の分散関係 ( $E, P_x/ P , P_y/ P , P_z/ P $ ) である。七、八、九列目はそれぞれミュオンの静止位置における磁場 ( $B_{\text{magnet}}, B_{\text{cavity}}, b$ )、ミュオニウムの状態振幅 ( $a_1(0)^2, a_2(0)^2, a_3(0)^2, a_4(0)^2$ )、立体角積分 ( $\int_{\Omega} \cos \theta d\Omega, \int_{\Omega} d\Omega$ ) である。 . . . . .	39
4.11	共鳴曲線の線幅と観測スタート時間 $t_1$ の関係。不確定性関係により寿命の長いミュオンを観測することにより共鳴の線幅が狭まる。 . . . . .	41
4.12	Fig:4.12 . . . . .	42
4.13	Conventional 法 (青) vs Old Muonium 法 (赤, $t_1 = 6 \mu\text{s}, t_2 = 7 \mu\text{s}$ )。 . . . . .	42
4.14	各時間窓で観測した共鳴曲線 (TM <sub>110</sub> モード)。時間の経過にしたがって、線幅が狭まってゆく。 . . . . .	43

4.15	各時間窓で観測した共鳴曲線 (TM <sub>210</sub> モード)。	44
4.16	マイクロ波パワーに対する時間窓ごとの FOM(TM <sub>110</sub> モード)。	45
4.17	マイクロ波パワーに対する時間窓ごとの FOM(TM <sub>210</sub> モード)。	46
4.18	マイクロ波パワーに対する FOM の積分値 (TM <sub>110</sub> モード)。緑は Conventional 法、赤は Old Muonium 法を表している。	47
4.19	マイクロ波パワーに対する FOM の積分値 (TM <sub>210</sub> モード)。緑は Conventional 法、赤は Old Muonium 法を表している。	47
4.20	Signal <sub>MAX</sub> vs マイクロ波パワー (Conventional 法)。	48
4.21	パワー拡がり:FWHM vs マイクロ波パワー (Conventional 法)。パワー拡がりにより線幅は広がる。	49
4.22	マイクロ波パワーを変化させたときの Old Muonium 法の共鳴曲線 ( $t_1 = 9 \mu\text{s}$ , $t_2 = 10 \mu\text{s}$ )。パワーの上昇によってサイドピークが原点に引き寄せられる。	50
4.23	FWHM vs マイクロ波パワー (Old Muonium 法)。	51
4.24	Signal <sub>MAX</sub> vs マイクロ波パワー (Old Muonium 法)。Conventional 法とは異なり、パワーの増加にともない線幅は減少する。	51
4.25	TM <sub>110</sub> モードで仮想実験を 100 回行った結果。	53
4.26	TM <sub>210</sub> モードで仮想実験を 100 回行った結果。	54
4.27	10 個の時間窓で Old Muonium 法 (TM <sub>110</sub> モード) を行ったときの結果。定数関数でフィッティングを行った。	54
4.28	10 個の時間窓で Old Muonium 法 (TM <sub>210</sub> モード) を行ったときの結果。定数関数でフィッティングを行った。	55
4.29	TM <sub>110</sub> モード実験を 100 回行ったときの仮想実験の結果。	55
4.30	TM <sub>210</sub> モード実験を 100 回行ったときの仮想実験の結果。	56
5.1	静磁場を仮定した場合に、TM <sub>110</sub> モードで仮想実験を 100 回行った結果。	58
5.2	静磁場を仮定した場合に、TM <sub>210</sub> モードで仮想実験を 100 回行った結果。	58
5.3	静磁場を仮定した場合に、TM <sub>110</sub> モードで仮想実験を 100 回行った結果。	59
5.4	静磁場を仮定した場合に、TM <sub>210</sub> モードで仮想実験を 100 回行った結果。	59
5.5	ミュオンの $xy$ 静止位置に変動を加え、TM <sub>110</sub> モードで仮想実験を 100 回行った結果。	61
5.6	ミュオンの $xy$ 静止位置に変動を加え、TM <sub>210</sub> モードで仮想実験を 100 回行った結果。	61
5.7	ミュオンの $xy$ 静止位置に変動を加え、TM <sub>110</sub> モードで仮想実験を 100 回行った結果。	62

5.8	ミュオンの $xy$ 静止位置に変動を加え、 $TM_{210}$ モードで仮想実験を 100 回行った結果。 . . . . .	62
5.9	マイクロ波パワーに 0.02 % の変動を加え、 $TM_{110}$ モードで仮想実験を 100 回行った結果。 . . . . .	63
5.10	マイクロ波パワーに 0.02 % の変動を加え、 $TM_{210}$ モードで仮想実験を 100 回行った結果。 . . . . .	64
5.11	マイクロ波パワー変動を加え、 $TM_{110}$ モードで仮想実験を 100 回行った結果。	65
5.12	マイクロ波パワーに変動を加え、 $TM_{210}$ モードで仮想実験を 100 回行った結果。 . . . . .	65
6.1	もとの外挿直線の切片 $\Delta v(0)$ 及び適切な変動を加えた後に再度外挿した直線の切片 $\Delta v(0)'$ の差 (式 4.2) を求めることにより、圧力外挿エラーが得られる。	70
6.2	$TM_{110}$ において 0.2 °C 以内の温度変動を加え後にゼロ外挿をし、同操作を 100 回行った。 . . . . .	71
6.3	$TM_{210}$ において 0.2 °C 以内の温度変動を加え後にゼロ外挿をし、同操作を 100 回行った。 . . . . .	72
6.4	$TM_{110}$ において 68 Pa 以内の圧力変動を加えた後にゼロ外挿をし、同操作を 100 回行った。 . . . . .	73
6.5	$TM_{210}$ において 68 Pa 以内の圧力変動を加えた後にゼロ外挿をし、同操作を 100 回行った。 . . . . .	74
6.6	水晶振動式圧力変換器 (Q-RPT) . . . . .	74
6.7	圧力計 RPM4。背面 (左図), 前面 (右図)。 . . . . .	75
6.8	$TM_{110}$ において読み取り精度 0.003 % の変動を圧力値に加えた後にゼロ外挿をし、同操作を 100 回行った。 . . . . .	75
6.9	$TM_{210}$ において読み取り精度 0.003 % の変動を圧力値に加えた後にゼロ外挿をし、同操作を 100 回行った。 . . . . .	76
6.10	$TM_{110}$ において $\delta b = 1.7$ の変動を加えた後にゼロ外挿をし、同操作を 100 回行った . . . . .	76
6.11	$TM_{210}$ において $\delta b = 1.7$ の変動を加えた後にゼロ外挿をし、同操作を 100 回行った . . . . .	77
A.0.1	検出器上の位置を単位球面上に射影する。 . . . . .	85
A.0.2	立体角積分は、検出器の位置を単位球上への射影によってできた四角形 $ \partial \mathbf{P} / \partial x_D \times \partial \mathbf{P} / \partial y_D $ の面積分として求められる。 . . . . .	86

# 表目次

1.1	先行実験が評価した不確かさの詳細 [1]。 . . . . .	4
2.1	MuHFS の理論値の各成分。 . . . . .	12
2.2	ミュオニウムのスレシヨルドエネルギー [15]。 正は熱化反応を、負は吸熱反応を表している。 . . . . .	14
4.1	先行実験 [1], [24] の系統的な不確かさ。 . . . . .	29
7.1	MuSEUM 高磁場測定の不確かさ。 . . . . .	80



# 第 1 章

## 序論

### 1.1 研究背景

ボーア模型が提唱される以前の前期量子論において、水素原子のスペクトル線が分光法を通して発見された。当時に発見されたスペクトルが即ち、バルマー系列、ライマン系列、パッシェン系列である。後にボーアが、従来の古典力学に電子軌道の量子化を取り入れたボーア模型を提唱し、水素原子の分光の結果をうまく説明した。以上からして、水素原子の分光は量子力学の誕生においてきわめて重要な役割を果たしていたことになる。その後の実験技術の進歩により、水素様原子の超微細構造<sup>\*1</sup>やラムシフト<sup>\*2</sup>といったきわめて小さいエネルギー準位間の遷移を測定する精密分光実験が高い精度で可能となった。一方で、理論方面については、超微細構造とラムシフトを説明できる場の量子論として量子電磁力学 (Quantum Electrodynamics: QED) が発展した。

私が所属する Muonium Spectroscopy Experiment Using Microwave (MuSEUM) グループは、日本の茨城県東海村にある加速器実験施設 Japan Proton Accelerator Research Complex (J-PARC) が供給する世界最高強度のパルスミュオンビームを用いて、ミュオニウムの基底状態  $1S$  における超微細構造 (Hyperfine Structure: HFS) をマイクロ波分光することによって先行実験 [1] の 10 倍以上の精度 (1 ppb) で測定し、束縛系量子電磁力学を最高精度で検証することを目標としている。

以下では、三種類の水素様原子、即ち水素原子、ポジトロニウムおよびミュオニウムについて論じながら、ミュオニウムはその中で束縛系量子電磁力学を最も高い精度で検証可能な水素様原子であることを示す。

---

<sup>\*1</sup> 超微細構造とは、原子の核スピンと電子スピンによるスピン・スピン相互作用に起因するエネルギー準位間の分裂である。本研究の目的は、ミュオニウムと呼ばれる水素様原子の基底状態における超微細構造を精密分光測定することである。

<sup>\*2</sup> ラムシフトは、Dirac 方程式では説明できない水素および水素様原子の  $2s^2S_{1/2}$ - $2p^2P_{1/2}$  間のエネルギー準位の分裂である。

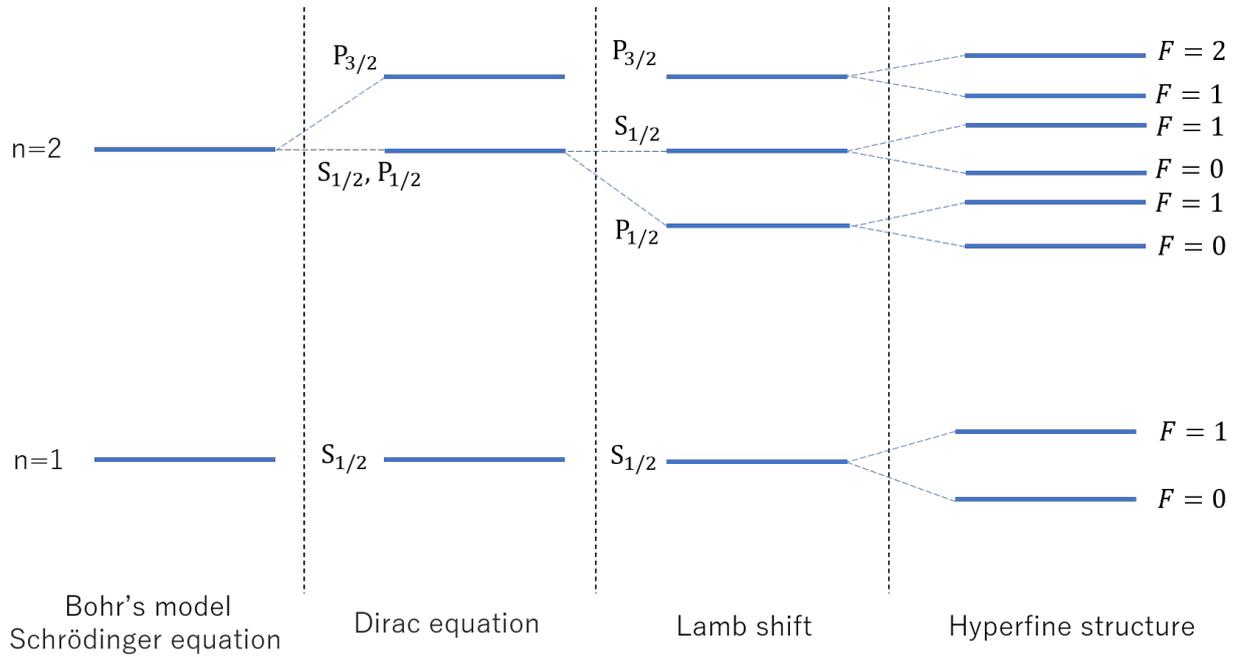


Fig.1.1 水素様原子のエネルギー準位図の模式図。

まず、水素原子の 1S の超微細構造間のエネルギー準位差の実験値  $\nu_{\text{H}}^{\text{exp}}$ [2] 及び理論値  $\nu_{\text{H}}^{\text{th}}$ [3] は

$$\nu_{\text{H}}^{\text{exp}} = 1.420\,405\,751\,766\,7(9) \text{ GHz (0.6 ppt)} \quad (1.1)$$

$$\nu_{\text{H}}^{\text{th}} = 1.420\,403\,1(8) \text{ GHz (560 ppb)} \quad (1.2)$$

であり、理論値が実験値よりもはるかに精度が悪い。これは水素の原子核であるプロトンが二個のアップクォークと一個のダウンクォークで構成されている複合粒子であるため、その複雑な内部構造により理論値に大きな不確かさが生じるためである。逆に言えば、水素原子の精密分光は、量子電磁力学の検証よりもプロトンの内部構造の探求に適したプローブであると言える。

次に、ポジトロンと電子との束縛系であるポジトロニウム (Positronium:Ps) の 1S 超微細構造間のエネルギー準位差の実験値  $\nu_{\text{Ps}}^{\text{exp}}$ [4] 及び理論値  $\nu_{\text{Ps}}^{\text{th}}$ [5] は

$$\nu_{\text{Ps}}^{\text{exp}} = 203.394\,2(16)_{\text{stat.}}(13)_{\text{sys.}} \text{ GHz (1.4 ppm)} \quad (1.3)$$

$$\nu_{\text{Ps}}^{\text{th}} = 203.391\,90(25) \text{ GHz (1.2 ppm)} \quad (1.4)$$

荷電レプトンのみからなるポジトロニウムは水素のような内部構造を持たず、また、実験値と理論値は近いため、束縛系量子電磁力学の検証は可能であるが、不確かさの単位は ppm であるため、最高精度での理論と実験との比較は難しい。

最後に、本研究の対象である正ミュオンと電子との束縛状態であるミュオニウム (Mu-

nium:Mu) の 1S 超微細構造間のエネルギー準位差の実験値  $\nu_{\text{Mu}}^{\text{exp}}$ [1] 及び理論値  $\nu_{\text{Mu}}^{\text{th}}$ [6] は

$$\nu_{\text{Mu}}^{\text{exp}} = 4.463\,302\,776(51) \text{ GHz (11 ppb)} \quad (1.5)$$

$$\nu_{\text{Mu}}^{\text{th}} = 4.463\,302\,868(271) \text{ GHz (61 ppb)} \quad (1.6)$$

ポジトロニウムと同じく荷電レプトンのみで構成される系でありながら、実験値と理論値の両方が ppb 単位であるため、ポジトロニウムの場合よりも約 1000 倍の精度で束縛系量子電磁力学の厳密性を検証できる。

以上の諸理由から、ミュオニウムは束縛系量子電磁力学を最も高い精度で検証可能な水素様原子であるといえる。

## 1.2 先行実験の概要

1960 年にミュオニウムの存在がそのラーモア歳差運動を通して発見 [7] されて以降、ミュオニウムの基底状態における超微細構造の精密測定は重要な物理学的意義を有していることから、これまでに幾度と測定が行われてきた。その中で最も高精度な先行実験は 1999 年に Los Alamos Meson Physics Facility(LAMPF) で行われた高磁場下での測定 [1] である。その結果は

$$\nu_{\text{LAMPF}}^{\text{High}} = 4.463\,302\,765(53) \text{ GHz (12 ppb)} \quad (1.7)$$

$$\frac{\mu_{\mu}}{\mu_p} = 3.183\,345\,24(37) \text{ (120 ppb)} \quad (1.8)$$

$$\frac{m_{\mu}}{m_e} = 206.768\,277(24) \text{ (120 ppb)} \quad (1.9)$$

LAMPF のミュオンビームの強度は  $10^7$  muons/sec であり、先行研究では共鳴幅を狭くする”Old Muonium”法<sup>\*3</sup>を採用するため、連続なミュオンビームをチョッパーを用いて擬似的にパルスミュオンビームに変換させていた。しかし、これによりビームの実効的な強度は  $2 \times 10^6$  muons/sec に落ち、結果的に統計量が最も支配的な不確かさとなった。一方、MuSEUM 実験は、J-PARC MLF が供給する  $10^8$  muons/sec という大強度パルスミュオンビームを用いることにより、先行研究の課題であった統計量の不足を克服できる。また、先行研究における不確かさに関しては、Table1.1 にあるように、クリプトン密度補正の変動 (Drift of Kr density calibration)、クリプトン密度補正 (Calibration of Kr density)、気体標的内の水素不純物 (Hydrogen contamination)、マイクロ波パワーの順に大きい。MuSEUM 実験は以下の方法で先行実験の系統不確かさの改善を目指している。

<sup>\*3</sup> ”Old Muonium”法は従来の共鳴曲線に比べてより狭い線幅が得られるという利点があるが、検出器に特定の時間窓を設けるため、測定の時間原点を正確に定める必要があった。

- クリプトン密度補正の変動：本項目は、クリプトンの密度補正を行い際に発生する温度換算に伴う系統的不確かさである。MuSEUM 実験は水冷装置を用いて共振器内のクリプトンの温度変動を先行実験と同じく 0.1 °C 以内に抑制する。
- クリプトン密度補正：高精度な圧力計測器 (0.003 %) を使用することで本項目を改善することができる。なお、先行実験の精度は 0.01% [24] である。
- 水素不純物：(6.26) 式からわかるように、低圧下における実験では不純物による圧力シフトをより軽減することができる。MuSEUM ゼロ実験は 0.3 atm 及び 0.4 atm での実験に成功している [22]。一方、先行実験の圧力値は、0.8 atm 及び 1.5 atm である。また、低圧実験は同時に気体の密度変動 (Kr density fluctuations) を軽減できる。
- マイクロ波パワー：フィードバックによる信号発生器の出力安定化 [28] 及び水冷装置による共振器の熱膨張の抑制。フィードバックを用いるとマイクロパワーの安定性は 0.02% 以内に収まる。なお、先行実験のパワー安定性は 0.05% である [24]。

Table 1.1 先行実験が評価した不確かさの詳細 [1]。

Run dependent uncertainties	$\delta\Delta\nu$ (ppb)
Sweep mode	$H\nu$
Statistical error	20 13
Kr density fluctuations	0.4 0.4
Drift of Kr density calibration	4.9 2.5
Muon stopping distribution	1.8 1.2
Magnetic field distribution	0 0
Microwave power uncertainty	1.1 2.0
Run independent uncertainties	$\delta\Delta\nu$ (ppb)
Apparatus effect on $H$ field	0
Absolute calibration of $H$ field	0
Calibration of Kr density	2.5
Hydrogen contamination	2.2
Quadratic pressure shift	1.9
Bloch-Siegert term [8]	0.6
Total	12

次に先行実験の実験手法について説明する。Fig. 1.2 は LAMPF 実験のセットアップ図である。右側から、進行方向と逆向きに完全に偏極したミュオンビームがガス標的に入射する。ガス標

的は超伝導磁石の内部に置かれており、標的付近にはミュオンビームの進行方向と平行に 1.7 T の均一な磁場が作られている。標的は純度 99.97% のクリプトンガスで充満されておりその圧力は 0.8 atm または 1.5 atm である。ガス標的内部には、銅製のマイクロ波共振器が設置されており、入射したミュオンの大部分は共振器の内部で停止する。停止したミュオンはクリプトンから電子を受け取り、ミュオニウムを形成する。アルミニウムエンドキャップとポチエチレン吸収剤は 35 MeV/c 以下の陽電子を吸収し、崩壊陽電子かバックグラウンド信号かを見分ける役割を果たす。検出器の信号定義は  $S = N_{ON}/N_{OFF} - 1$  である。 $N_{ON}$  と  $N_{OFF}$  はそれぞれマイクロ波を印加した場合と印加しなかった場合に検出される陽電子数である。LAMPF での実験では共鳴曲線を求めるために、磁場スキャンと周波数スキャンの二方法を採用している。

- 磁場スキャン：1.7 T を中心として、1 ステップで磁場を約  $\pm 0.005$  T 変え、120 回の測定を行う。
- 周波数スキャン：共鳴中心から  $\pm 200$  kHz の範囲を 1 ステップで周波数を 20 kHz 変え、20 回の測定を行う。また、周波数を折り返して再度 20 回測定する (double sweep)。

1 ステップの測定は共通しており、 $N_{ON}$  と  $N_{OFF}$  とにそれぞれ 10 beams ずつ使う。

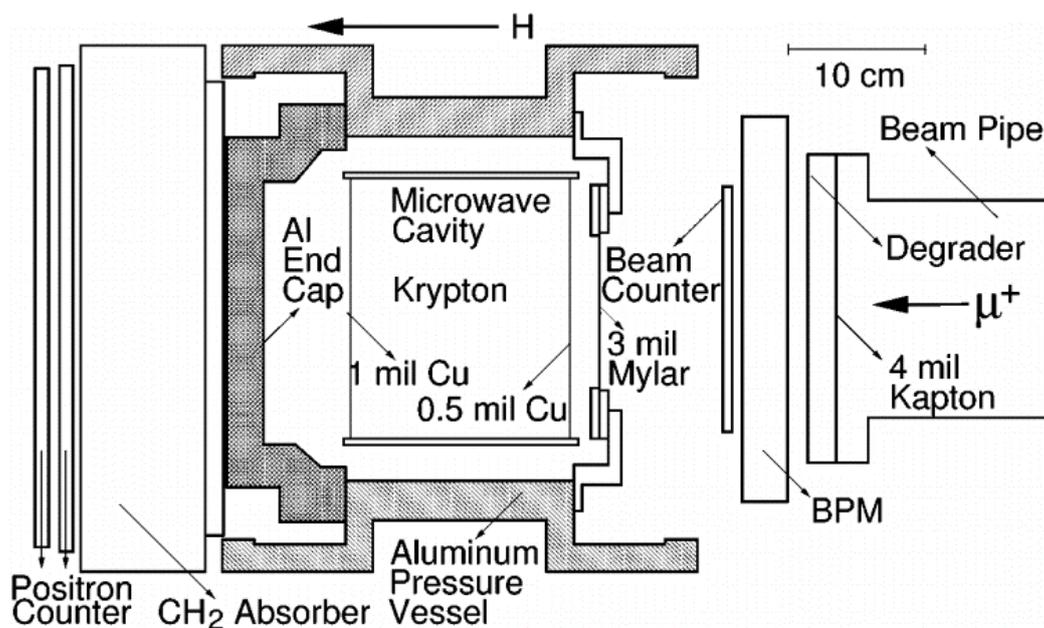


Fig.1.2 LAMPF での実験のセットアップ図 [1]。

## 1.3 研究目的

### 1.3.1 MuSEUM 実験の目的

MuSEUM 実験の意義は、最高精度での束縛系量子電磁力学の厳密性の検証である。それはミュオニウムの基底状態における超微細構造をマイクロ波分光をすることで達成される。また、ミュオン-陽子の磁気モーメント比  $\mu_\mu/\mu_p$  とミュオン-電子の質量比  $m_\mu/m_e$  といった基礎物理定数 [6] を同時に最高精度 (10 ppb 以上) で決定することができる。特に、ミュオン-陽子磁気モーメント比  $\mu_\mu/\mu_p$  に関しては、次式のミュオン異常磁気モーメント  $a_\mu$

$$a_\mu = \frac{g_\mu - 2}{2} \quad (1.10)$$

を決定する際に必要となる物理定数である。

現在のミュオンの異常磁気モーメント  $a_\mu$  の実験値 [9] 及び理論値 [10] は

$$a_\mu^{\text{exp}} = 11\,659\,204.0(5.4) \times 10^{-10} \text{ (460 ppb)} \quad (1.11)$$

$$a_\mu^{\text{the}} = 11\,659\,181.0(4.3) \times 10^{-10} \text{ (369 ppb)} \quad (1.12)$$

先行実験 [9] において、 $a_\mu$  の不確かさ 460 ppb のうち測定のみで得られる  $\mu_\mu/\mu_p$  の決定精度は式 (8) より 120 ppb であり、次世代のミュオン異常磁気モーメント測定では無視できない寄与となっている。また、実験値と標準模型 (Standard Model:SM) による直近の理論値との間に約  $4.2\sigma$  の乖離があり (Fig.1.3)、標準模型を超える新物理が示唆されている。これは、MuHFS のマイクロ波分光実験は標準模型の厳密検証に貢献できることを意味する。

ミュオン異常磁気モーメントの実験手順について説明する。まず、自身の運動量方向に偏極したミュオンをストレージリングに入射させる。この時、ミュオンはストレージリング内をサイクロトロン振動数  $\omega_c$  で円運動を行う。

$$\omega_c = -\frac{qB}{m\gamma} \quad (1.13)$$

また、ミュオンスピンは相対論的效果を考慮したトーマス歳差振動数  $\omega_s$  で回転する。

$$\omega_s = -\frac{g_\mu qB}{2m} - (1 - \gamma)\frac{qB}{m\gamma} \quad (1.14)$$

$\gamma$  はローレンツ因子である。ミュオンの  $g_\mu$  因子が正確に 2 であるならば、トーマス歳差振動数  $\omega_s$  はスピンのラーモア歳差振動数  $\omega_L$  と完全に一致する。

$$\omega_s = -\frac{qB}{m\gamma} \equiv \omega_L \quad (1.15)$$

しかし実際には  $g_\mu$  因子は 2 より大きいため、スピンは運動量に対してわずかに早く回転することになり、次式が得られる。

$$\omega_a = \omega_s - \omega_c = -\left(\frac{g_\mu - 2}{2}\right)\frac{qB}{m} = -a_\mu \frac{qB}{m} \quad (1.16)$$

従って、振動数  $\omega_a$  と磁場  $B$  を精度よく測定することで、異常磁気モーメント  $a_\mu$  を決定することが出来る。式 (1.16), (1.17) より、ミュオンの異常磁気モーメント  $a_\mu$  は

$$a_\mu = \frac{\omega_a}{\omega_L - \omega_a} = \frac{\omega_a/\tilde{\omega}_p}{\omega_L/\tilde{\omega}_p - \omega_a/\tilde{\omega}_p} \equiv \frac{R}{\lambda - R} \quad (1.17)$$

$\tilde{\omega}_p$  は、NMR 磁気プローブを用いて測定した陽子のラーモア歳差振動数である。 $R$  はミュオン ( $g_\mu - 2$ ) 実験から求まる量であり、 $\lambda$  はミュオンと陽子の磁気モーメント比であり、MuSEUM 実験はこの量を世界最高精度で求めることができる。

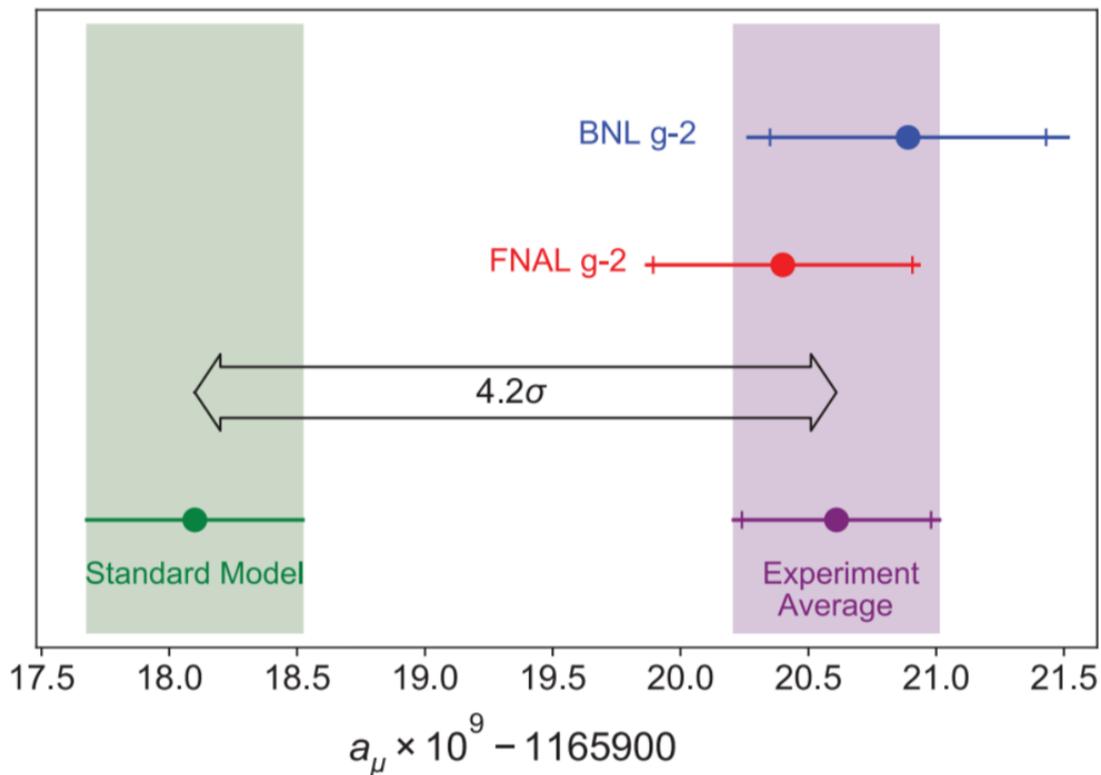


Fig.1.3 ミュオンの異常磁気モーメントの実験値 [9] と理論値 [10] の比較。両者の間には  $4.2\sigma$  の乖離が認められている。

### 1.3.2 本研究の目的

2011 年に本格的に始動した MuSEUM 実験は、堅実に研究開発を進め、2016 年には MLF D Line を用いたゼロ磁場下での実験を行い、ミュオニウムの基底状態における超微細構造の

共鳴を観測した。2018 年には直径 181 mm の  $TM_{220}$  モード共振器を開発し、共振器内に止まるミュオンの統計量を改善することで測定精度が向上した [22]。そのときの実験結果が (1.19) である。

$$\nu_{\text{MuSEUM}}^{\text{Zero}} = 4.463\,305\,5(23)\text{ GHz (0.5 ppm)} \quad (1.18)$$

本研究の目的は、H Line の建設が完成に近づきつつある現時点において、今後予定されている高磁場実験にそなえ、実験を行った場合に予想される系統的不確かさを含めた実験全体が有する不確かさを評価し、見積もることである。

## 1.4 本論文の構成

本論文は本章を含め、全七章である。

- 第 1 章では本研究の目的に主について論じている。
- 第 2 章ではミュオニウム分光の原理について記している。
- 第 3 章では MuSEUM 実験の手法、実験装置について論じている。
- 第 4 章ではシミュレーションの手法、その妥当性及び統計的不確かさについて論じている。
- 第 5 章では Line Fitting に分類される系統的不確かさについて論じている。
- 第 6 章では Gas Extrapolation に分類される系統的不確かさについて論じている。
- 第 7 章では結論と今後の展望について論じている。

## 第2章

# 原理

### 2.1 原理

ミュオニウムに磁場を印加した場合のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = h\Delta\nu\mathbf{S}_\mu \cdot \mathbf{S}_e + g_J\mu_B^e\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{B} + g'_\mu\mu_B^\mu\mathbf{S}_\mu \cdot \mathbf{B} \quad (2.1)$$

第一項はミュオンスピンと電子スピンの相互作用を表している。 $h$ と $\Delta\nu$ はそれぞれプランク定数とミュオニウムの超微細構造である。第二項及び第三項は外部磁場と電子スピンの相互作用、外部磁場とミュオンスピンの相互作用を表している。 $g_J$ はミュオンの束縛下の電子の $g$ 因子である。 $g_J$ [12]と $g'_\mu$ [13]は量子電磁力学の計算により、以下の式で与えられる。

$$g_J = g_e \left( 1 - \frac{\alpha^2}{3} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{m_e}{m_\mu} + \frac{\alpha^3}{4\pi} \right) + \dots \quad (2.2)$$

$$g'_\mu = g_\mu \left( 1 - \frac{\alpha^2}{3} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{m_e}{m_\mu} \right) + \dots \quad (2.3)$$

ここで、 $\alpha$ は微細構造定数、 $m_e$ と $m_\mu$ はそれぞれ電子とミュオンの質量である。

外部磁場の向きを $z$ 方向にとり、昇降演算子を用いると、式(2.1)は次式に変形できる。

$$\mathcal{H} = (g'_\mu\mu_B^\mu S_\mu^z + g_J\mu_B^e S_e^z) \cdot B^z + \frac{h\Delta\nu}{2} (S_\mu^+ S_e^- + S_\mu^- S_e^+) + h\Delta\nu S_\mu^z \cdot S_e^z \quad (2.4)$$

(2.4)を解くと以下のエネルギー固有値が得られる (Fig.2.1)。

$$E_1 = \frac{h\Delta\nu}{4} + \frac{B^z}{2} (g'_\mu\mu_B^\mu + g_J\mu_B^e) \quad (2.5)$$

$$E_2 = -\frac{h\Delta\nu}{4} + \frac{h\Delta\nu}{2} \sqrt{1+x^2} \quad (2.6)$$

$$E_3 = \frac{h\Delta\nu}{4} - \frac{B^z}{2} (g'_\mu\mu_B^\mu + g_J\mu_B^e) \quad (2.7)$$

$$E_4 = -\frac{h\Delta\nu}{4} - \frac{h\Delta\nu}{2} \sqrt{1+x^2} \quad (2.8)$$

ここで、 $x$  は次式を満たす。

$$x \equiv \frac{(-g'_\mu \mu_B^\mu + g_J \mu_B^e) B^z}{h \Delta \nu} \quad (2.9)$$

高磁場実験では、状態 1-2 の準位差  $\nu_{12}$ 、状態 3-4 の準位差  $\nu_{34}$  をそれぞれ測定し、MuHFS は二つの和として求まる。

$$\nu_{12} = \frac{E_1 - E_2}{h} = -\frac{g'_\mu \mu_B^\mu B^z}{h} + \frac{\Delta \nu}{2} [(1+x) - \sqrt{1+x^2}] \quad (2.10)$$

$$\nu_{34} = \frac{E_3 - E_4}{h} = \frac{g'_\mu \mu_B^\mu B^z}{h} + \frac{\Delta \nu}{2} [(1-x) + \sqrt{1+x^2}] \quad (2.11)$$

$$\Delta \nu = \nu_{12} + \nu_{34} \quad (2.12)$$

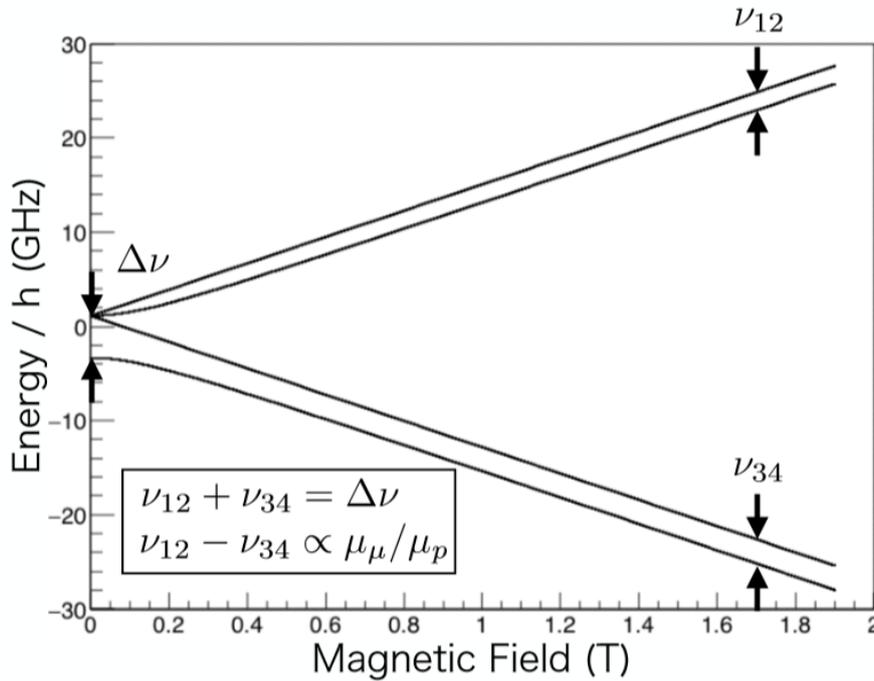


Fig.2.1 ゼーマン効果によってトリプレット状態の縮退がとける様子を表す Breit-Rabi 図。高磁場測定の場合、 $\nu_{12}$  と  $\nu_{34}$  の和がミュオニウムの超微細構造  $\Delta \nu$  に相当する。

一方、ミュオン-陽子磁気モーメント比  $\mu_\mu/\mu_p$  は、次式により  $\nu_{34}, \nu_{12}$  の差として求まる。

$$\frac{\mu_\mu}{\mu_p} = \frac{4\nu_{12}\nu_{34} + \nu_p \frac{\mu_e}{\mu_p} (\nu_{34} - \nu_{12})}{\nu_p \left[ \nu_p \frac{\mu_e}{\mu_p} - (\nu_{34} - \nu_{12}) \right]} \propto \nu_{34} - \nu_{12} \quad (2.13)$$

$\nu_p$  は超伝導電磁石がつくる磁場に対応する NMR サンプル (プロトン) の基準振動数<sup>\*1</sup>であり、陽子の磁気回転比  $\gamma_p$  を用いて

$$2\pi\nu_p = \gamma_p B \quad (2.14)$$

と表せる。

(2.5)~(2.8) に対応する固有状態は

$$|1\rangle = \chi_{1,1}(\mathbf{B}) = |\uparrow_\mu \uparrow_e\rangle \quad (2.15)$$

$$|2\rangle = \chi_{1,0}(\mathbf{B}) = s |\uparrow_\mu \downarrow_e\rangle + c |\downarrow_\mu \uparrow_e\rangle \quad (2.16)$$

$$|3\rangle = \chi_{1,-1}(\mathbf{B}) = |\downarrow_\mu \downarrow_e\rangle \quad (2.17)$$

$$|4\rangle = \chi_{0,0}(\mathbf{B}) = c |\uparrow_\mu \downarrow_e\rangle - s |\downarrow_\mu \uparrow_e\rangle \quad (2.18)$$

$$s^2 + c^2 = 1 \quad (2.19)$$

ただし、係数  $s$  と  $c$  は次式を満たす。

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^{1/2} \quad (2.20)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^{1/2} \quad (2.21)$$

高磁場極限では  $s \rightarrow 0, c \rightarrow 1$  となるので、(2.16) 及び (2.18) は次式に近似できる。

$$\chi_{1,0}(\mathbf{B}) \simeq |\downarrow_\mu \uparrow_e\rangle \quad (2.22)$$

$$\chi_{0,0}(\mathbf{B}) \simeq |\uparrow_\mu \downarrow_e\rangle \quad (2.23)$$

## 2.2 HFS の理論

CODATA 2016[6] による MuHFS の理論値の見積もり値は

$$\Delta\nu(\text{th}) = 4.463\,302\,868(271) \text{ GHz (61 ppb)} \quad (2.24)$$

である。(2.24) は次式に示すように 6 つの寄与の和である。

$$\Delta\nu(\text{th}) = \Delta\nu_{\text{D}} + \Delta\nu_{\text{rad}} + \Delta\nu_{\text{rec}} + \Delta\nu_{\text{r-r}} + \Delta\nu_{\text{weak}} + \Delta\nu_{\text{had}} \quad (2.25)$$

第一項から順に、ディラック方程式、輻射補正、ミュオンと電子の反跳補正、輻射による反跳補正、電弱理論、ハドロンである。最初の四項は量子電磁力学による寄与であり、その中でも

<sup>\*1</sup> 1.7 T の磁場中の陽子のラーモア振動数は約 72.382 MHz である。

ディラック方程式の項が MuHFS のほぼ全体を占めている (Table2.1)。

$$\Delta\nu_{\text{QED}} = \Delta\nu_{\text{D}} + \Delta\nu_{\text{rad}} + \Delta\nu_{\text{rec}} + \Delta\nu_{\text{r-r}} \quad (2.26)$$

$$= \nu_F \left( 1 + F \left( \alpha, Z\alpha, \frac{m_e}{m_\mu} \right) \right) \quad (2.27)$$

$\nu_F$  は次式で定義されるフェルミエネルギーである。 $F(\alpha, Z\alpha, m_e/m_\mu)$  は QED の高次項を表す。

$$\nu_F = \frac{16}{3} Z^3 \alpha^2 \frac{m_e}{m_\mu} R_\infty c \left( 1 + \frac{m_e}{m_\mu} \right)^{-3} \quad (2.28)$$

Table2.1 MuHFS の理論値の各成分。

$\Delta\nu(\text{th})$	Term	Numerical Value
$\Delta\nu_{\text{D}}$	Dirac Equation	4 459 388 138(509)
$\Delta\nu_{\text{rad}}$	Radiative Corrections	4 709 680(1)
$\Delta\nu_{\text{rec}}$	Recoil Corrections	- 791 437(9)
$\Delta\nu_{\text{r-r}}$	Radiative-Recoil Corrections	- 3 652(4)
$\Delta\nu_{\text{weak}}$	Electroweak Contributions	-65 [6]
$\Delta\nu_{\text{had}}$	Hadronic Contribution	233(1.4) [6]
Total	Total Contributions	4 463 302 896(511)

## 2.3 ミュオニウム生成

J-PARC はシンクロトロンを利用して陽子ビームを 3 GeV になるまで加速させた後にグラフィット標的に衝突させ以下の核反応を起こす。

$$p + \frac{A}{Z}\text{N} \rightarrow \frac{A'}{Z'}\text{N}' + s^\pm(e^\pm, \pi^\pm, p, \dots) + s^0(\gamma, \nu, \pi^0, n, \dots) \quad (2.29)$$

$\frac{A'}{Z'}\text{N}'$  は核反応によって生じる原子核、 $s^\pm$  は各種荷電粒子、 $s^0$  は各種中性粒子をそれぞれ表している。核反応により生成されたパイ中間子は以下のモードで自然崩壊する。

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (2.30)$$

標的表面に静止しているパイ中間子が崩壊時に放出するミュオン (表面ミュオン) の運動量とエネルギーは、運動量とエネルギーの保存則から求まる。

$$P_\mu = 29.4 \text{ MeV}/c \quad (2.31)$$

$$E_\mu = 4.2 \text{ MeV} \quad (2.32)$$

パイ中間子はスピン0の粒子なので、角運動量保存則によりミュオンスピンとミュ・ニュートリノスピンの向きはそれぞれ逆向きになる。ここで、弱い相互作用がパリティを100%破ることから、ニュートリノには左巻き(スピンが進行方向の反対の向きを向いている)ものしか存在しないことを考えると、パイ中間子の崩壊時に放出されるミュオンも常に左巻きであることが分かる (Fig.2.2)。

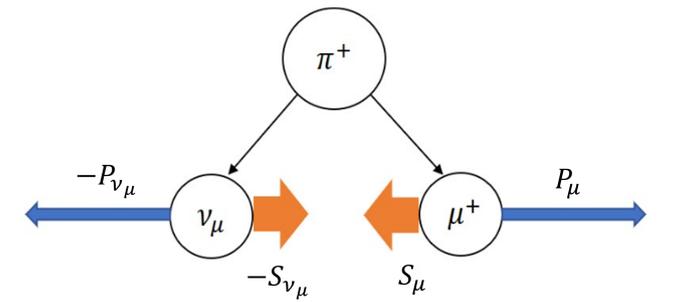


Fig.2.2 弱い相互作用によるパイ中間子の自然崩壊。 $p, s$  は粒子の運動量とスピンをそれぞれ表している。パリティ対称性の破れにより、左巻きのニュートリノとミュオンしか生成されない。

ミュオニウムの生成時、ミュオンの脱偏極を引き起こす不必要な化学反応を防ぐために不活性気体が標的として使用する。ミュオニウムは式 (2.33) にあるように、ミュオンが標的の電子を捕獲することで生成され、(2.34) はその生成条件である。 $E_{\text{ion}}(\text{gas})$  は気体標的のイオン化エネルギー、 $E_{1s}(\text{Mu})$  はミュオニウムの基底エネルギー (-13.54 eV) である。Table2.2 によりクリプトンが最も実験に適した気体標的である。



$$E_t = E_{\text{ion}}(\text{gas}) + E_{1s}(\text{Mu}) > 0 \quad (2.34)$$

気体標的に入射後のミュオンは、標的をイオン化させ、あるいは励起させることでエネルギーが徐々に失われ、標的気体と同程度の運動エネルギーにまで減速される。

ミュオンの初期スピンは、必ず自身の運動量方向と逆向きになるため、 $t=0$  のときのミュオニウムの密度行列 (2.35) にあるように、その状態分布も必然的にスピン偏極の影響を受け、一様でなくなる。

$$\rho(0) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1+P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+P(s^2-c^2) & 0 & 2csP \\ 0 & 0 & 1-P & 0 \\ 0 & 2csP & 0 & 1+P(c^2-s^2) \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Table2.2 ミュオニウムのスレシヨルドエネルギー [15]。  
 正は熱化反応を、負は吸熱反応を表している。

標的気体	$E_t$ eV
He	+11.04
Ne	+8.02
Ar	+2.22
Kr	+0.46
Xe	-1.41
O <sub>2</sub>	-1.3
N <sub>2</sub>	+2.0

ミュオンの初期スピン偏極  $P$  は  $-1$  であり、高磁場測定では、 $s \simeq 0$ ,  $c \simeq 1$  となるので次式が得られる。

$$|a_1(0)|^2 = \rho_{11}(0) = 0 \quad (2.36)$$

$$|a_2(0)|^2 = \rho_{22}(0) \simeq \frac{1}{2} \quad (2.37)$$

$$|a_3(0)|^2 = \rho_{33}(0) \simeq \frac{1}{2} \quad (2.38)$$

$$|a_4(0)|^2 = \rho_{44}(0) \simeq 0 \quad (2.39)$$

## 2.4 固有状態

時間に依存するシュレディンガー方程式は

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} = (\mathcal{H} + \mathcal{H}') \psi(r, t) \quad (2.40)$$

$\mathcal{H}'$  は次式にあるようにマイクロ波とミュオニウム間の磁氣的相互作用である。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= \left( g'_\mu \mu_B^\mu \mathbf{S}_\mu + g_J \mu_B^e \mathbf{S}_e \right) \cdot \mathbf{B}_{\text{RF}} \cos \omega t \\ &= H' \cos \omega t = \frac{H'}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

外部磁場 1.7 T に対して、マイクロ波磁場は十分小さいため、 $\mathcal{H}'$  は摂動論的に扱える。TM<sub>110</sub> モード、TM<sub>210</sub> モードの磁場は  $z$  成分を持たないので、 $\mathbf{B}_{\text{RF}} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y$  を満たす。 $\omega$  はマイクロ波の振動数である。

ミュオニウムの波動関数は次式のように変数分離できる。

$$\psi(r, t) = \phi(r) \sum_{k=1}^4 a_k(t) |k\rangle e^{-iE_k t/\hbar} \quad (2.42)$$

(2.42) を (2.40) に代入して

$$i\hbar \sum_{k=1}^4 \dot{a}_k |k\rangle e^{-iE_k t/\hbar} = \sum_{i=1}^4 a_i \frac{H'}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) e^{-iE_i t/\hbar} |i\rangle \quad (2.43)$$

完全系  $\sum_{k=1}^4 |k\rangle \langle k| = \hat{1}$  を (2.43) の右辺に挿入して

$$\begin{aligned} i\hbar \sum_{k=1}^4 \dot{a}_k |k\rangle e^{-iE_k t/\hbar} &= \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 a_i |k\rangle \langle k| \frac{H'}{2} |i\rangle (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) e^{-iE_i t/\hbar} \\ i\hbar \dot{a}_k e^{-iE_k t/\hbar} &= \sum_{i=1}^4 a_i \langle k| \frac{H'}{2} |i\rangle (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) e^{-iE_i t/\hbar} \\ \therefore \dot{a}_k &= -i \sum_{i=1}^4 a_i \langle k| \frac{H'}{2\hbar} |i\rangle \left( e^{-i(\frac{E_i - E_k}{\hbar} - \omega)t} + e^{-i(\frac{E_i - E_k}{\hbar} + \omega)t} \right) \\ &\equiv -i \sum_{i=1}^4 a_i b_{ki} f_{ik}(t) \quad (\because E_i - E_k \equiv \hbar\omega_{ik}) \end{aligned} \quad (2.44)$$

磁気双極子行列  $b$  は  $B_{\pm} = B_x \pm iB_y$  を用いて以下のようにかける。

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{sg_J\mu_B^e + cg'_{\mu}\mu_B^{\mu}}{4\hbar} B_- & 0 & \frac{cg_J\mu_B^e - sg'_{\mu}\mu_B^{\mu}}{4\hbar} B_- \\ \frac{sg_J\mu_B^e + cg'_{\mu}\mu_B^{\mu}}{4\hbar} B_+ & 0 & \frac{cg_J\mu_B^e + sg'_{\mu}\mu_B^{\mu}}{4\hbar} B_- & 0 \\ 0 & \frac{cg_J\mu_B^e + sg'_{\mu}\mu_B^{\mu}}{4\hbar} B_+ & 0 & \frac{-sg_J\mu_B^e + cg'_{\mu}\mu_B^{\mu}}{4\hbar} B_+ \\ \frac{cg_J\mu_B^e - sg'_{\mu}\mu_B^{\mu}}{4\hbar} B_+ & 0 & \frac{-sg_J\mu_B^e + cg'_{\mu}\mu_B^{\mu}}{4\hbar} B_- & 0 \end{pmatrix}$$

ミュオンの自然幅  $\gamma$  を用いて崩壊の時間依存性は次式で表される。

$$\dot{a}_k = -\frac{1}{2}\gamma a_k \quad (2.45)$$

(2.45) を (2.44) に代入すれば次式が得られる。

$$a_k = -\frac{1}{2}\gamma a_k - i \sum_{i=1}^4 a_i b_{ki} f_{ik}(t) \quad (2.46)$$

### 2.4.1 高磁場測定

高磁場測定の場合、(2.46) の行列表示は以下になる。

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3 \\ \dot{a}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} & -ib_{12}e^{i(\omega_{12}-\omega)t} & 0 & 0 \\ -ib_{12}^*e^{-i(\omega_{12}-\omega)t} & -\frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma}{2} & -ib_{34}e^{i(\omega_{34}-\omega)t} \\ 0 & 0 & -ib_{34}^*e^{-i(\omega_{34}-\omega)t} & -\frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

ただし、以下の近似を使った。

- $|\omega_{kl}| \approx \omega$  のとき、 $|\omega_{kl}| + \omega \gg |\omega_{kl}| - \omega$  が成り立つので、 $\omega_{kl} + \omega$  を含む振動項は十分に速く振動する。その時間平均は 0 となるため、 $f_{ik}(t) = e^{-i(\frac{E_i - E_k}{\hbar} - \omega)t}$  が成り立つ (回転波近似)。
- 共鳴に寄与しない状態間遷移 ( $kl = 13, 14, 23$ ) の項は無視できる (非共鳴状態)。

(2.47) より高磁場測定では二準位系に帰着できる。状態 1-2 間の遷移についての解は

$$a_1(t) = \left( a_1(0) \left[ \cos \frac{\Gamma t}{2} - i \frac{\Delta\omega}{\Gamma} \sin \frac{\Gamma t}{2} \right] + a_2(0) \left[ -i \frac{2b}{\Gamma} \sin \frac{\Gamma t}{2} \right] \right) e^{(-\gamma + i\Delta\omega)t/2} \quad (2.48)$$

$$a_2(t) = \left( a_1(0) \left[ -i \frac{2b^*}{\Gamma} \sin \frac{\Gamma t}{2} \right] + a_2(0) \left[ \cos \frac{\Gamma t}{2} + i \frac{\Delta\omega}{\Gamma} \sin \frac{\Gamma t}{2} \right] \right) e^{(-\gamma - i\Delta\omega)t/2} \quad (2.49)$$

である [18]。ただし、 $b$  はラビ周波数 (以下マイクロ波パワーと表記する)、 $\Gamma$  は一般化ラビ周波数である。

$$\Delta\omega = \omega_{12} - \omega \quad (2.50)$$

$$\Gamma = \sqrt{\Delta\omega^2 + 4b^2} \quad (2.51)$$

印加するマイクロ波の周波数を変えたときの状態 1 及び 2 の時間発展を Fig:2.3 に示した。

## 2.5 ミュオン崩壊

ミュオンは次のモードで崩壊する。

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad (2.52)$$

このときに生成される陽電子のエネルギーの上限値は

$$E_{max} \simeq \frac{(m_\mu^2 + m_e^2)c^2}{2m_\mu} - m_e c^2 = 52.32 \text{ MeV} \quad (2.53)$$

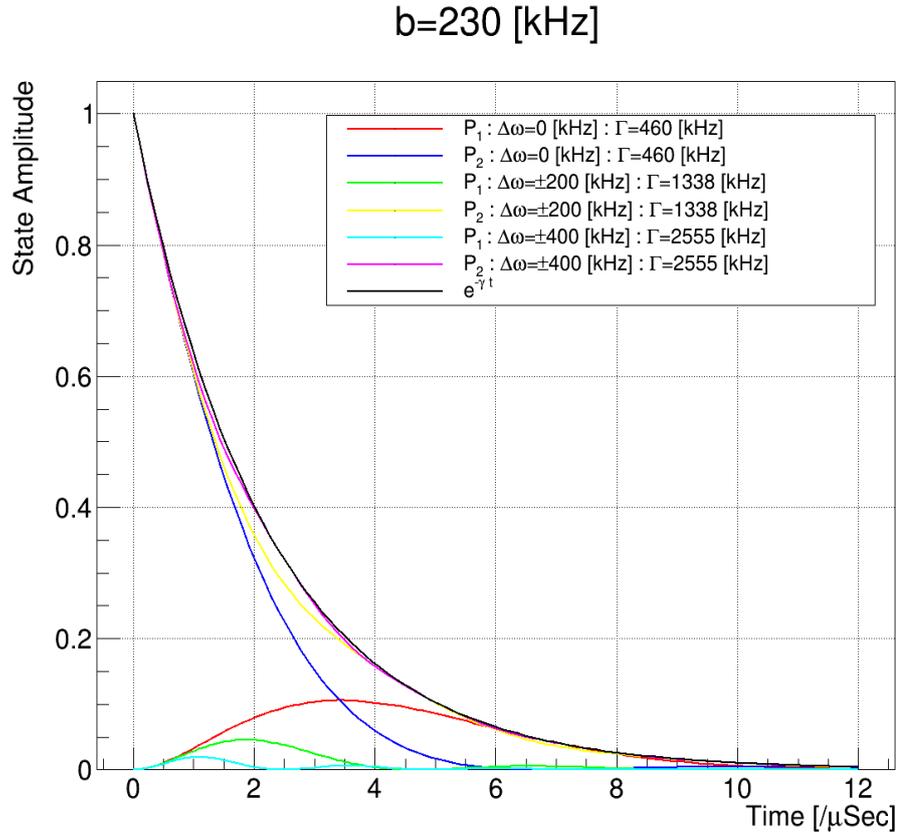


Fig.2.3 ミュオニウムの状態振幅の時間発展。ミュオニウム形成後の約  $12 \mu\text{s}$  にほぼ全てのミュオンが崩壊する。TM<sub>210</sub> モードの場合、 $P_1 \simeq P_3$ ,  $P_2 \simeq P_4$  となる。

である。陽電子の規格化エネルギーを  $y$  とすると、単位時間あたりにエネルギー  $y$  の陽電子が  $\theta$  方向に崩壊される確率は

$$N(y, \theta, t) dy d\Omega dt = \frac{\gamma y^2}{2\pi} [(3 - 2y) + (2y - 1)P_{z0}(t) \cos \theta] e^{-\gamma t} dy d\Omega dt \quad (2.54)$$

である。右辺は陽電子の空間密度分布 (Fig.2.4, Fig.2.5) を表している。 $y^2(3 - 2y)$  は陽電子のエネルギー分布 (Fig.2.6) である。

$P_{z0}(t)$  は次式で与えられるミュオンのスピン偏極である。

$$\begin{aligned} \langle P_z(t) \rangle &= \langle \psi(t) | 2\hat{S}_\mu^z / \hbar | \psi(t) \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^2 a_i^* a_j \langle i | 2\hat{S}_\mu^z / \hbar | j \rangle e^{i\omega_{ij}t} \\ &\simeq |a_1(t)|^2 - |a_2(t)|^2 \\ &= P_{z0}(t) e^{-\gamma t} \end{aligned} \quad (2.55)$$

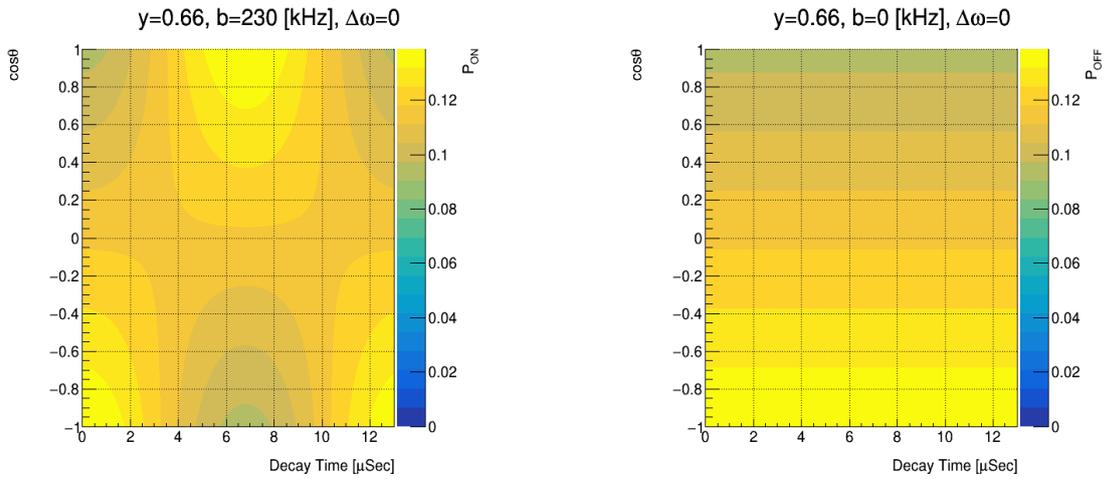


Fig.2.4 単位時間あたりの崩壊陽電子 ( $y$ : threshld Energy) の空間密度分布。左図はマイクロ波パワーを 230 kHz 印加した際の分布、右図はマイクロ波パワーを印加しない場合の分布を表している。

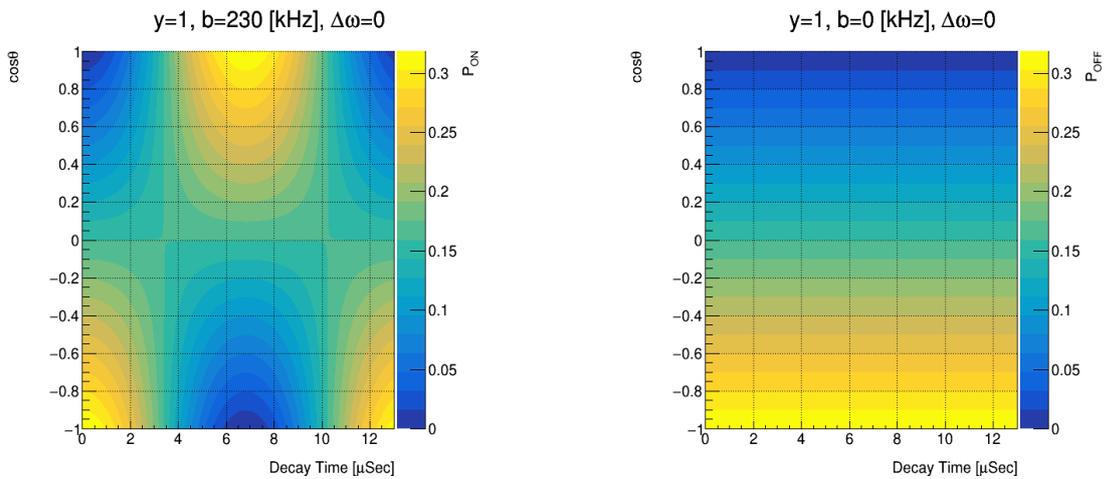


Fig.2.5 単位時間あたりの崩壊陽電子 ( $y$ : maximum) の空間密度分布。

ここで、(2.55) は次式を満たす。

$$|a_1(t)|^2 + |a_2(t)|^2 = e^{-\gamma t} \quad (2.56)$$

(2.55) を Fig.2.7 に図示した。ミュオンの三体崩壊の過程では、陽電子のエネルギーは連続分布になる。陽電子検出器のスレッシュヨルドを  $y_0$  としたとき、 $\theta$  方向の検出器が時刻  $t_1$  から  $t_2$

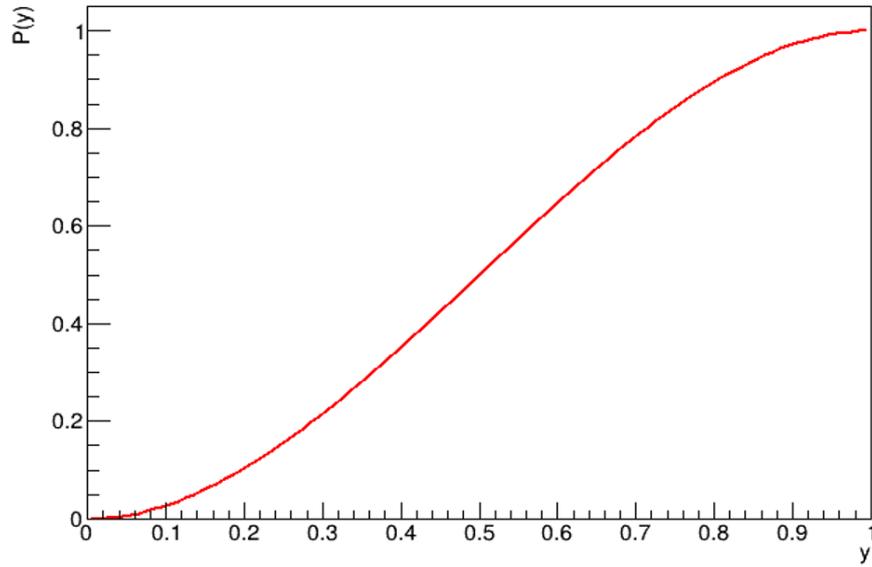


Fig.2.6 陽電子のエネルギー分布。  $y_0 = 0.66$  のとき、観測確率は約 73% である。

までの間に陽電子を検出する確率は次式である。

$$\begin{aligned}
 N(\theta) &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{y_0}^1 N(y, \theta, t) dy dt d\Omega \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\gamma}{4\pi} A_1(y_0) [1 + a(y_0) P_{z0}(t) \cos \theta] e^{-\gamma t} dt d\Omega
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

ここで、以下の表式を用いた。(2.57) は陽電子の検出割合 (Fig.2.9)、(2.60) は陽電子分布の非対称性である。

$$A_1(y_0) = 1 - (2y_0^3 - y_0^4) \tag{2.58}$$

$$A_2(y_0) = \frac{1}{3} - (y_0^4 - \frac{2}{3}y_0^3) \tag{2.59}$$

$$a(y_0) = \frac{A_2(y_0)}{A_1(y_0)} \tag{2.60}$$

本研究に用いられる陽電子のスレシヨルド  $y_0$  は  $0.66 (= 35 \text{ MeV}/c)$  である。これは先行実験 [1] と同じ数値である。(2.61) は崩壊陽電子の角度分布 (Fig.2.8)。

$$P(\theta) = \frac{A_1(y_0) [1 + a(y_0) P_{z0}(t) \cos \theta]}{4\pi} \tag{2.61}$$

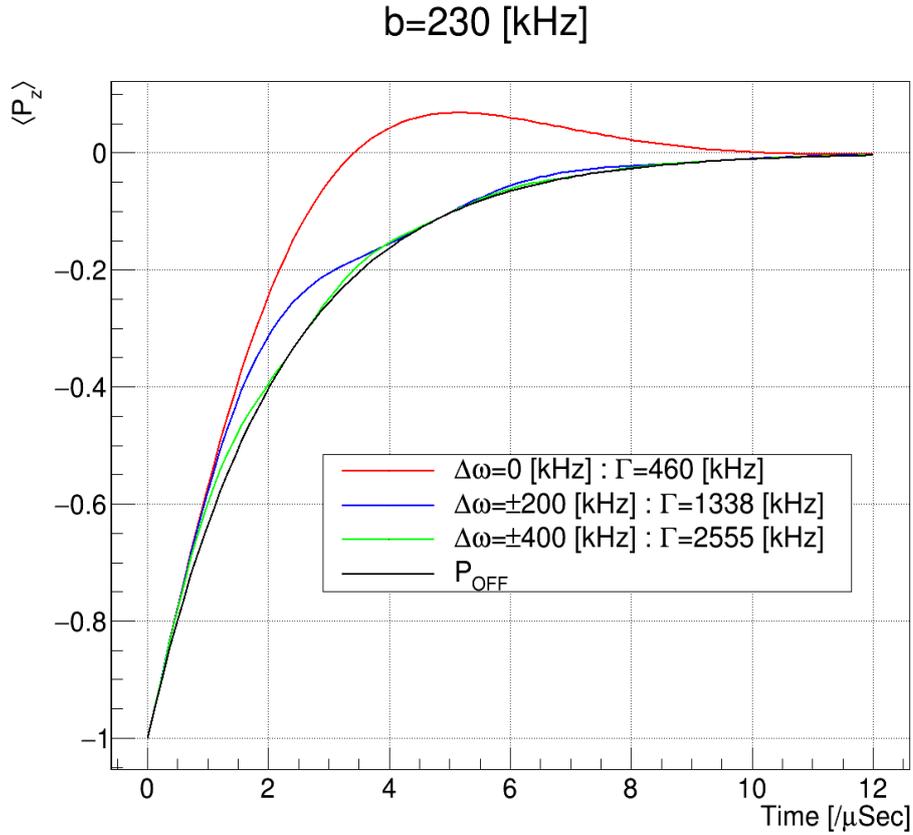


Fig.2.7 ミュオンの  $z$  方向のスピンの平均値。時間の経過にしたがってスピンの緩和がする。

## 2.6 共鳴曲線

実験で測定する信号は次式で定義される。

$$S = \frac{N_{ON}}{N_{OFF}} - 1 \quad (2.62)$$

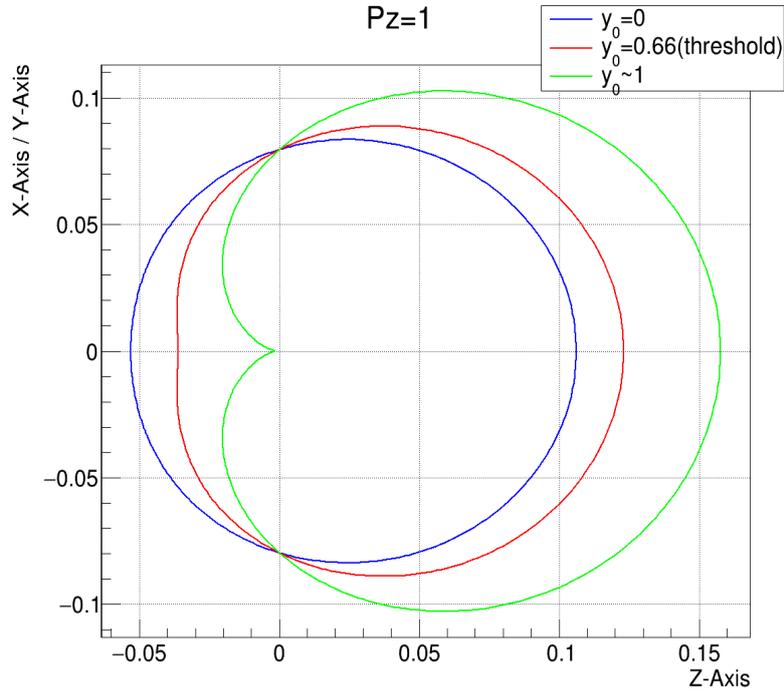
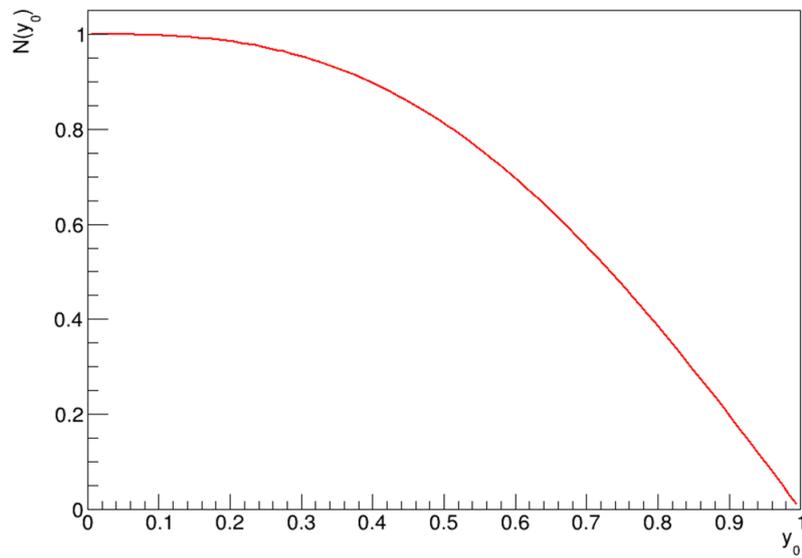
$N_{ON}$  と  $N_{OFF}$  はそれぞれマイクロ波を ON、OFF にした場合に検出される陽電子の数である。

(2.57) を用いると信号  $S$  は

$$S = \frac{a(y_0) \int_V \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \rho(\mathbf{r}) \cos \theta (P_{ON}(t) - P_{OFF}(t)) e^{-\gamma t} dt d\Omega dV}{\int_V \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} \rho(\mathbf{r}) (1 + a(y_0) P_{ON}(t) \cos \theta) e^{-\gamma t} dt d\Omega dV} \quad (2.63)$$

となる。 $\rho(\mathbf{r})$  はキャビティ内のミュオニウムの分布である。(2.55) を用いると (2.63) は

$$S = \frac{-a(y_0) P \int_V \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) \cos \theta d\Omega dV}{\int_V \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) (1 + a(y_0) \cos \theta) e^{-\gamma t} d\Omega dV} \times \frac{L_{the}^{old}}{e^{-\gamma t_1} - e^{-\gamma t_2}} \quad (2.64)$$

Fig.2.8  $P_z = 1$  としたときの崩壊陽電子の角度分布。Fig.2.9 陽電子の検出割合。 $y_0 = 0.66$  のとき、全体の約 61% を観測できる。

となる。ただし、 $L_{\text{the}}^{\text{old}}$  はマイクロ波の影響を表す部分である。

$$L_{\text{the}}^{\text{old}} = \frac{2|b|^2}{\Gamma^2} \left[ e^{-\gamma t_1} \left( 1 - g(t_1) \frac{\gamma^2}{\Gamma^2 + \gamma^2} \right) - e^{-\gamma t_2} \left( 1 - g(t_2) \frac{\gamma^2}{\Gamma^2 + \gamma^2} \right) \right] \quad (2.65)$$

$$g(t) = \cos(\Gamma t) - \frac{\Gamma}{\gamma} \sin(\Gamma t) \quad (2.66)$$

(2.64) は、”Old Muonium”法における共鳴曲線である。”Old Muonium”法とは、比較的寿命の長いミュオンのみを選別し、観測・解析する実験手法である。その利点は、ミュオンの自然幅 145 kHz よりも狭い線幅をもつ曲線の観測を可能にすることである。

### 2.6.1 Conventional 法

”Conventional”法とは、最初に、ミュオニウムが生成されてマイクロ波が印加された直後から継続的に陽電子の数を計測し、信号を得るという実験手法である。Conventional 法の場合、(2.65) において、 $t_1, t_2$  はそれぞれ  $0, \infty$  となるので、次式が得られる。

$$S = \frac{-a_{y0}P \int_V \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) \cos \theta d\Omega dV}{\int_V \rho(\mathbf{r}) \int_{\Omega} (1 + a_{y0}P \cos \theta) d\Omega dV} \times L_{\text{the}}^{\text{con}} \quad (2.67)$$

この場合、 $L_{\text{the}}^{\text{con}}$  は次式を満たす。

$$L_{\text{the}}^{\text{con}} = \frac{2|b|^2}{\Delta\omega^2 + 4|b|^2 + \gamma^2} = \frac{2|b|^2}{\Gamma^2 + \gamma^2} \quad (2.68)$$

## 第 3 章

# 実験

### 3.1 MuSEUM 実験の原理

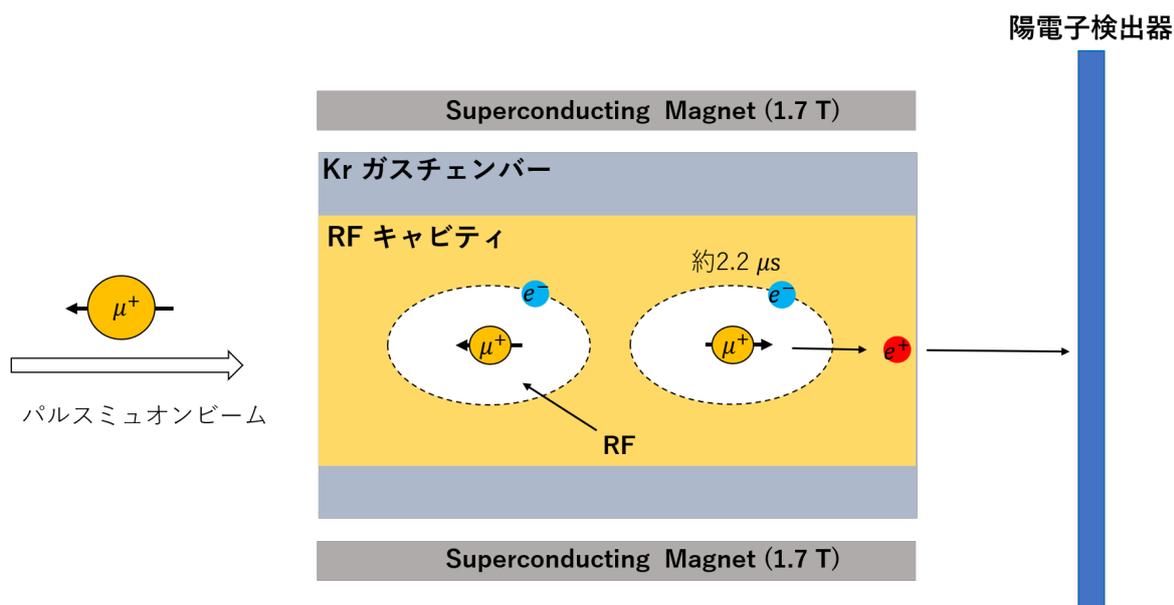


Fig.3.1 ミュオニウムの超微細構造分光実験のためのセットアップ。

本章では MuSEUM 高磁場測定の実験手法について説明する。Fig.3.1 は実験のセットアップ図である。まず、J-PARC MLF の H Line が供給する大強度かつ偏極したパルスミュオンビーム ( $10^8$  muons/sec) がクリプトンに充満したマイクロ波共振器に入射される。ミュオンはクリプトン原子と衝突を繰り返してミュオニウムが生成される。超伝導電磁石がビーム軸方向につくる静磁場がミュオニウムのゼーマン分裂を引き起こす。磁石の中心に設置された円筒形共振器は  $\text{TM}_{110}$  モード ( $\text{TM}_{210}$  モード) で共鳴し、ビーム軸とは垂直な向きに超微細構造遷移を誘起するためのマイクロ波磁場がミュオニウムに印加される。ミュオニウムとマイクロ波磁

場の相互作用によりミュオンのスピンは下流側に向きを反転させ、崩壊陽電子を陽電子検出器に放出する。共鳴実験はマイクロ波の周波数を掃引しながら周波数ごとに変化する陽電子の計数を観測する。

## 3.2 実験装置

### 3.2.1 マイクロ波システム

Fig.3.2 は MuSEUM 高磁場実験のマイクロ波システムを表している。超微細構造遷移を誘起するために、まず、信号発生器 (R&S SMB 100A) を用いて  $\nu_{12}(\nu_{34})$  近傍の周波数帯のマイクロ波信号をつくる。信号発生器の最大出力は 26 dBm( $\approx 400$  mW) であり、ミュオニウムの超微細構造間遷移を誘起するために必要なマイクロ波パワーはまだ得られていない。そのため、我々は4つの並列した信号増幅器でパワーを増幅させた後にマイクロ波を円筒型の共振器 (Fig.3.3) に導入する。酸化アルミニウム製のチューニングバーは、共振器の内壁にネジ止めされたピエゾポジショナ (attocube ANPz101eXT12) によって固定されている。コントローラー (attocube ANC350) でその位置を変えることで周波数を掃引できる。また、ループアンテナとパワーメータを用いて共振器内のマイクロ波パワーのモニタリングを行う。

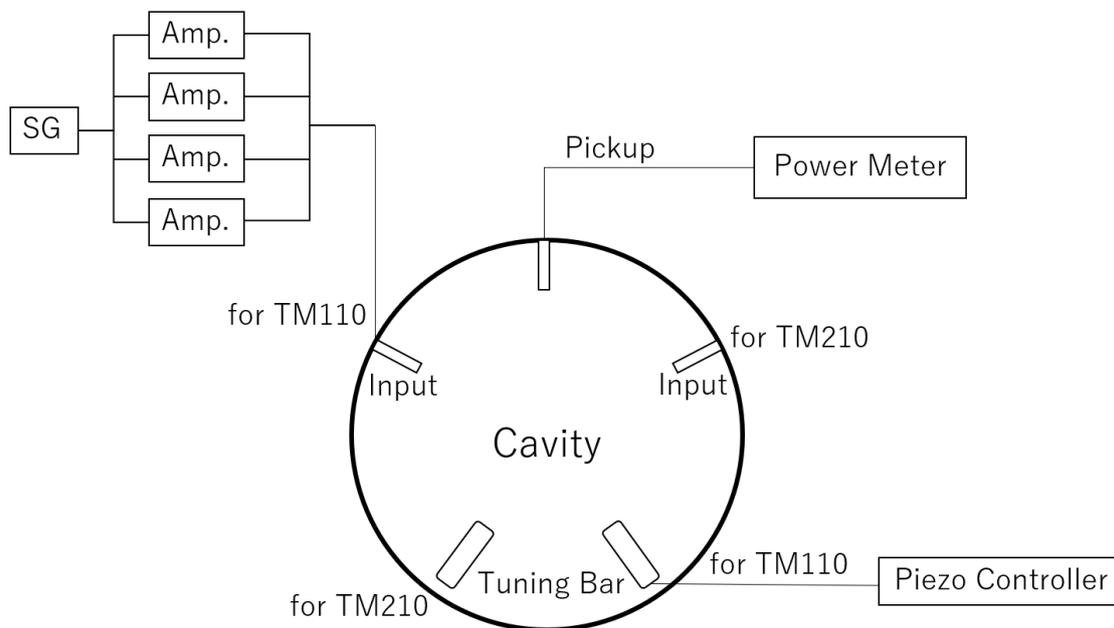


Fig.3.2 MuSEUM 高磁場実験のマイクロ波システム。

マイクロ波システムの構成要素は以下である。

- 信号発生器: R&S SMB 100A
- 信号増幅器: Mini Circuit ZVE-8G
- パワーセンサー: R&S NRP-Z51
- マイクロ波共振器
- ピエゾポジショナー: attocube ANPz101eXT12
- ピエゾコントローラー: attocube ANC350

### 3.2.2 マイクロ波共振器

$$\nu_{12} = 1.897 \text{ GHz} \quad (3.1)$$

$$\nu_{34} = 2.566 \text{ GHz} \quad (3.2)$$

式(3.1),(3.2)に示した振動数の近傍で振動する磁場をミュオニウムに印加するために、円筒型共振器の共鳴モードが用いられている。その共鳴周波数  $f_{mnp}$  は

$$f_{mnp} = \frac{c}{n'} \sqrt{\left(\frac{j_{mn}}{\pi D}\right)^2 + \left(\frac{p}{2L}\right)^2} \quad (3.3)$$

である。 $c$ は光速、 $n'$ は媒質の屈折率、 $D, L$ は共振器の直径と長さ、 $j_{mn}$ はベッセル関数  $J_m(\xi)$ の  $n$ 番目の零点である。MuSEUM 高磁場測定に使われる共振器 (Fig.3.3) は、電磁場を反射させて内部に閉じ込めることができる銅製である。これによりエネルギー散逸を軽減し、高い  $Q$ 値の実現が可能となる。内径 187 mm を式 (3.3) に代入すると  $\text{TM}_{110}$  モード、 $\text{TM}_{210}$  モードの周波数が得られる。

$$\nu_{110} = 1.955 \text{ GHz} \quad (3.4)$$

$$\nu_{210} = 2.621 \text{ GHz} \quad (3.5)$$

酸化アルミニウム製の誘電性チューニングバーは、電磁場を自身の位置に誘導するので、実行的に共振器の半径を大きくする。実験中ではチューニングバーの位置を変え、 $\nu_{12}, \nu_{34}$  を含む周波数帯をスキャンする。マイクロ波共振器の長さは、ミュオンのビーム軸方向の静止分布を考慮し、また、 $\text{TM}_{110}, \text{TM}_{210}$  モード以外のモードが及ぼす影響をなるべく減らすために、長さが 304 mm となるように設計されている [28]。

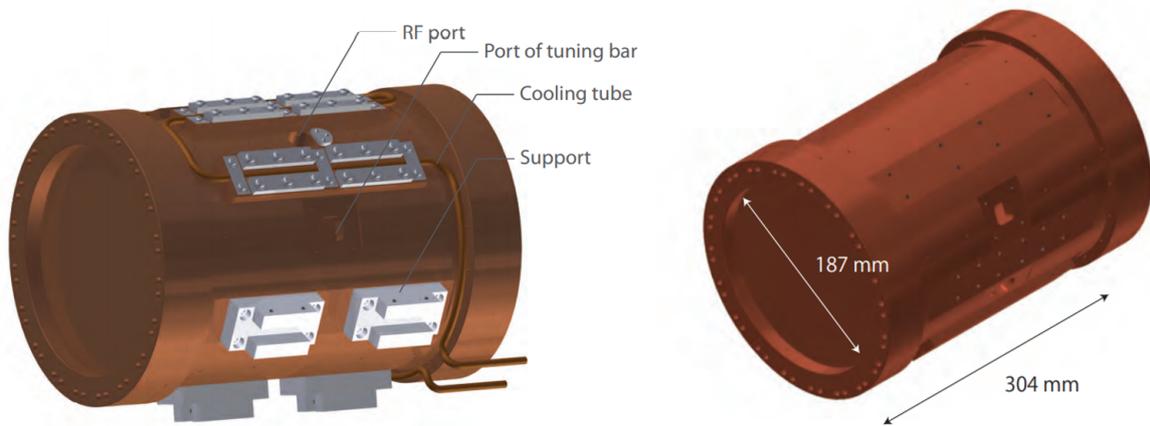


Fig.3.3 高磁場測定用マイクロ波共振器 (内径 187 mm, 長さ 304 mm)。TM110 モードと TM210 モードで共鳴するように設計されている。入力用のポートが 2 つ、ピックアップ用のポートが 1 つ、チューニングバーのためのポートが 2 つ計 5 つのポートがある。前面と後面にはビームと陽電子を通過させるための銅製フォイルがあり、その厚さは 25  $\mu\text{m}$  である [28]。

### 3.2.3 標的気体容器

ガスチェンバーは気体標的を密閉するための容器である。これは Fig.3.4 にあるように円筒形であり、マイクロ波共振器をその中に内蔵できるように設計されている。ガスチェンバーの内径は 280 mm, 長さ 450 mm である。その前面にはミュオンビームを通過させるための厚さ 100  $\mu\text{m}$ , 直径 100 mm のアルミニウム製円形フォイル、後面には崩壊陽電子を通過させるための厚さ 10 mm, 直径 180 mm のアルミニウム製円形フォイルがある。

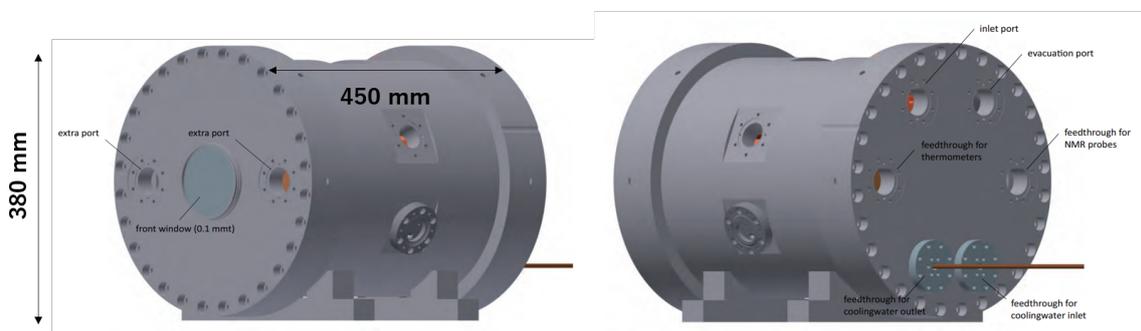


Fig.3.4 クリプトンガスチェンバー。左図と右図はそれぞれチェンバーの前面と後面を表している。共振器のパワー調整及びチューニング、水冷装置、温度計と NMR 磁気プローブ、排気系等のためのポートがついている [28]。

### 3.2.4 陽電子検出器

陽電子検出器は二次元的に広がっている平面構造である (240 mm × 240 mm)。576 個のピクセル (10×10×3 mm<sup>3</sup>) に分割され、各ピクセルには一対のプラスチックシンチレーター (EJ212 by ELGEN) と半導体光検出器 (Silicon Photomultiplier; SiPM) が入っている。SiPM には光電子計数管 (Multi-Pixel Photon Counters; MPPC, Hamamatsu Photonics K.K., S12825-050P-01) が取り付けられ、読み出し回路には KEK が開発した Kalliope が使用される [29]。

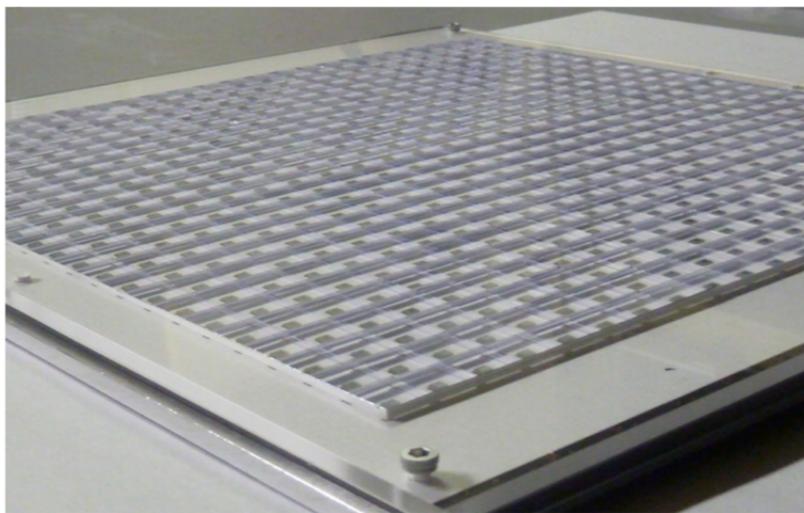


Fig.3.5 陽電子検出器 [29]。

### 3.2.5 超伝導電磁石

1.7 T の高磁場をつくりだすには MRI 用超伝導磁石 (MRI: Magnetic Resonance Imaging) が用いられる。磁場の目標均一度は 0.2 ppm(peak-to-peak) であり、シミングと呼ばれる手法で磁石の内壁に鉄片を配置することで誤差磁場はキャンセルされ、目標とする一様磁場を実現することができる。鉄片の配置は、設定磁場から鉄片の磁気モーメントを求める逆問題であり、特異値分解が利用されている。磁石の内部にはガスチェンバーとマイクロ波キャビティが挿入される。



Fig.3.6 超伝導電磁石。

### 3.2.6 ビームモニター

実効的な磁場強度や立体角はミュオンの静止位置に依存する。系統的不確かさを評価するためには、ミュオンビームの強度、プロファイル、静止位置分布等を把握しなければならない。それには気体標的中のミュオン静止位置分布を測定する Target Beam Profile Monitor(TBPM)と標的に入射直前のビーム形状および強度を測定する Front Beam Profile Monitor (FBPM)がある。ビームダクトとガスチェンバーとの間に配置されたFBPMは、直径  $100\ \mu\text{m}$  の細いシンチレーションファイバーの一次元配列を二層に重ね合わせられて作られている [28]。

## 第4章

# シミュレーション

本章は、ミュオニウム高磁場分光実験のためのモンテカルロシミュレーション及びその結果の妥当性についての検討、さらにはシミュレーション結果から導かれる統計的不確かさ等の内容を扱う。先行実験 [1] において、系統的な不確かさは、共鳴曲線の形状を変化させ中心値をずらすもの (Line Fitting) と、圧力毎の測定値から外挿して圧力ゼロにおける値を求めるときに影響を与えるもの (Pressure Extrapolation) の二種類に分類されている (Table4.1)。\*<sup>1</sup>

Table4.1 先行実験 [1], [24] の系統的な不確かさ。

	”ラン”依存	”ラン”不依存
曲線フィッティングエラー (Line Fitting)	磁場分布 ミュオン静止位置分布 マイクロ波パワー 立体角分布	Bloch-Siegert 項 非共鳴状態 磁気プローブの精度 周辺機器による磁場の乱れ
圧力外挿エラー (Pressure Extrapolation)	クリプトンの圧力変動 クリプトンの温度変動	水素不純物 二次の圧力シフト

共鳴曲線の形状を変える系統的な不確かさ (Line Fitting) の大きさを見積もるためには、まず、シミュレーション結果を理論式  $S_{\text{the}}$  でフィッティングしてから  $\Delta\nu$  を求め、次に、該当するパラメータに微小な変化を与えた後に再度フィッティングをしておし、その際に得られた結果を  $\Delta\nu'$  とすると、その差が目的の系統的な不確かさである。

$$\delta\Delta\nu = |\Delta\nu' - \Delta\nu| \quad (4.1)$$

\*<sup>1</sup> 表中の”ラン (Run)”は測定に換言できる。”ラン”に依存する不確かさは、共鳴曲線をひとつ得るたびに、その測定条件に応じた系統的な不確かさを評価する必要がある項目をさす。一方、”ラン”に依存しない不確かさは、一度評価すればおおよそすべての測定結果に適用できるものをさす。

同様にして圧力外挿 (Pressure Extrapolation) に分類される系統的な不確かさを求めることができる。通常の外挿から求めた  $\Delta\nu(0)$  と、圧力等のパラメータにゆらぎを加えた後に再度外挿から求めた値を  $\Delta\nu'(0)$  とすると、系統的な不確かさはその差である。

$$\delta\Delta\nu(0) = |\Delta\nu'(0) - \Delta\nu(0)| \quad (4.2)$$

## 4.1 シミュレーション

先行研究が提示する系統的な不確かさは実験結果から見積もられているが、MuSEUM 実験は実験を行う H Line が現在建設中のため、実際の高磁場実験は未だ行われていない。そこで、本研究はモンテカルロ法を用いて MuSEUM 高磁場実験をシミュレーション的に行い、それから W. Liu と同じように Table 4.1 に示した分類に基づいて不確かさを導出する方針である。以下は本研究のシミュレーションの手続きである。

1. GEANT 4[32] よりミュオンの静止位置分布を導出する。
2. 各ミュオンの静止位置における静磁場強度とマイクロ波強度を求める。
3. 求めた物理量を CERN の ROOT File[35] に格納する。
4. 前述の ROOT File を用いて共鳴曲線を導出し、そのフィッティング結果から統計的な不確かさを評価する。
5. 式 (4.1)、(4.2) を用いて系統的な不確かさを見積もる。

### 4.1.1 手続き 1

運動量 27.4 MeV/c を持つ 400,000 個のミュオンを発生させ、温度 293.15 K, 圧力 1 atm のクリプトンガスが充填されたガスチェンバーに入射させたときの静止位置分布が Fig. 4.2 と Fig. 4.3 である。

Fig. 4.2 は静止ミュオンの  $z$  分布を表している。その結果は  $z \sim 91$  mm (from cavity upfoil) である。また、Fig. 4.3 は静止ミュオンの  $xy$  分布である。二次元ガウシアンでこれを近似すると、次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} x &= 0.1294 \text{ mm} \\ \sigma_x &= 16.46 \text{ mm} \\ y &= -0.032 \text{ mm} \\ \sigma_y &= 16.28 \text{ mm} \end{aligned} \quad (4.3)$$

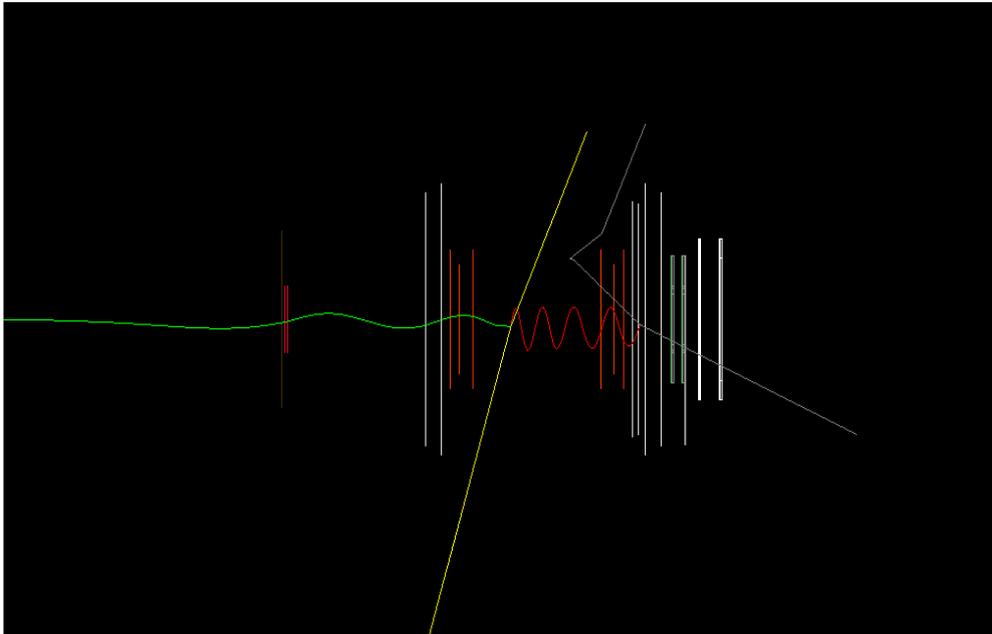


Fig.4.1 Geant4 シミュレーション (Green: $\mu^+$ , Red: $e^+$ , Yellow: $\nu_e, \bar{\nu}_\mu$ )。

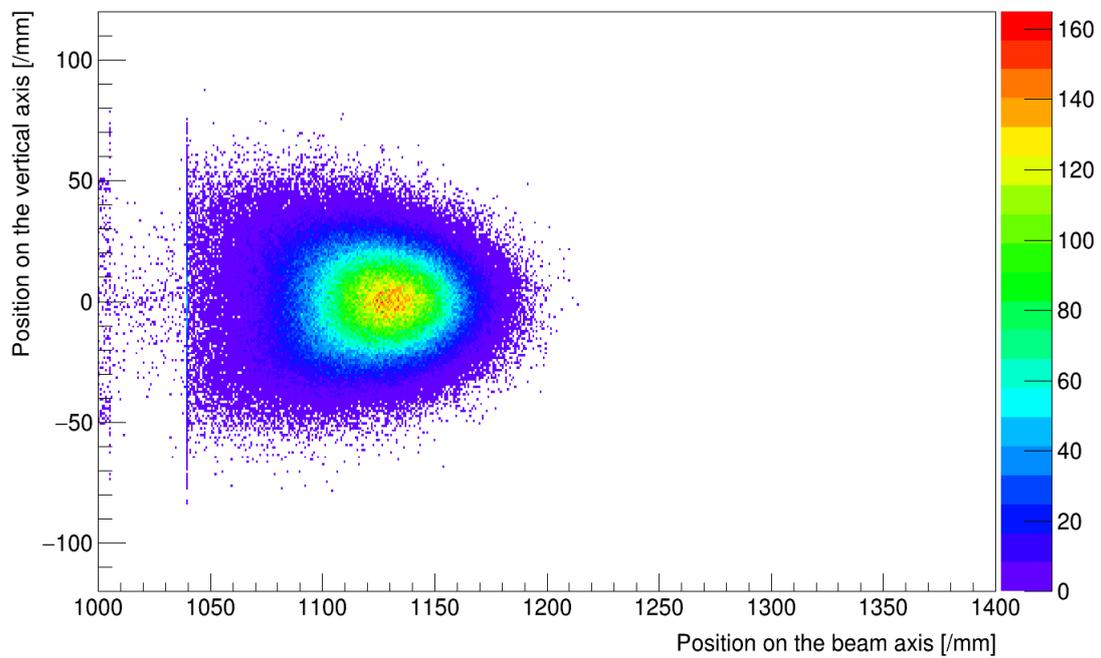
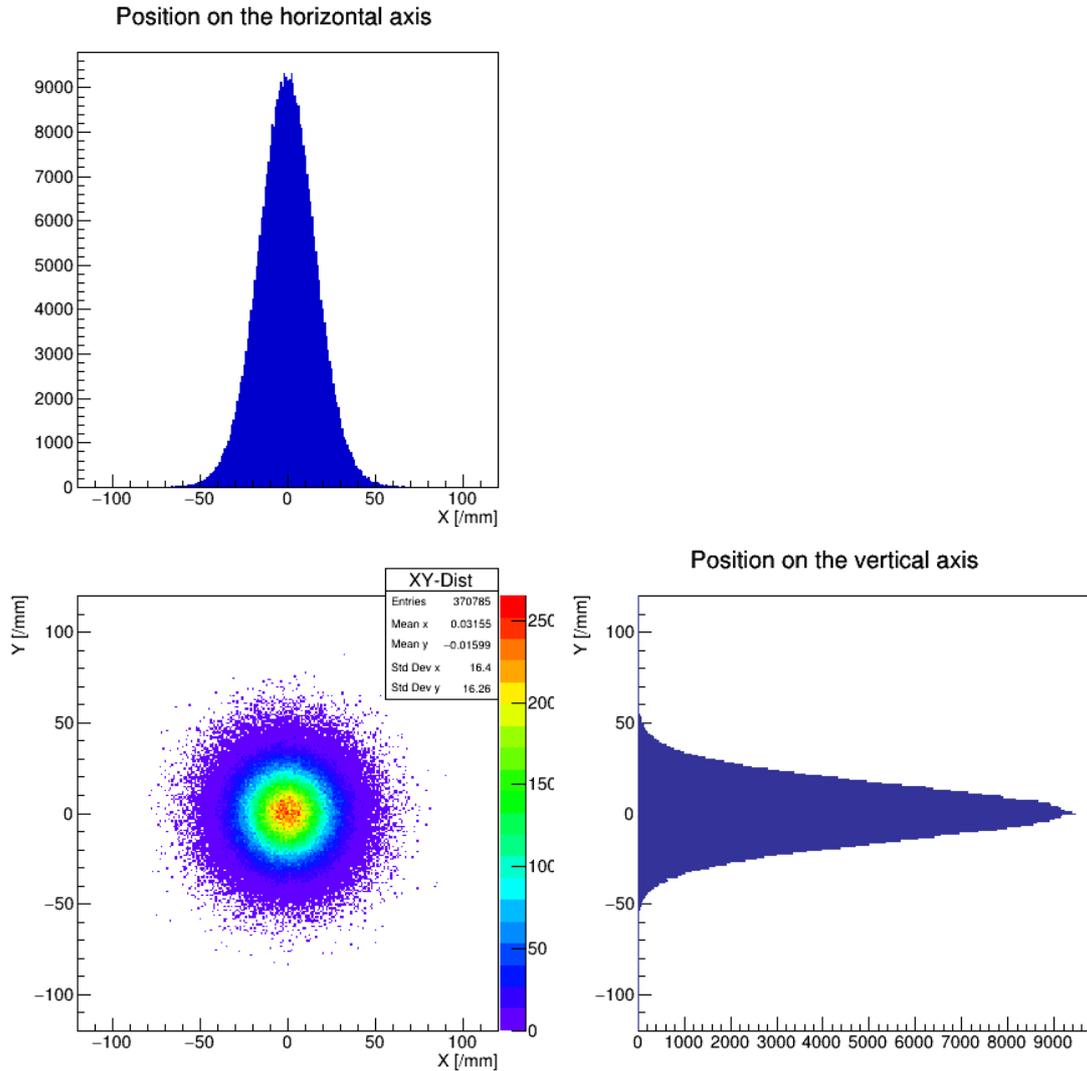


Fig.4.2 ビーム軸方向のミュオン静止位置分布。共振器の上流フォイルから約 91 mm の位置に静止する。

Fig.4.3 マイクロ波共振器内の静止ミュオンの  $xy$  分布。

### 4.1.2 手続き 2

次に、静止位置分布から各ミュオンの静止位置での磁場 (磁石磁場、共振器磁場、マイクロ波パワー  $b_{12}, b_{34}$ ) を計算する。

超伝導磁石による静磁場は、M. Abe の測定データ<sup>\*2</sup>をもとに構成された磁気モーメントを用いて計算されている [33], [34]。  $j$  番目の磁気モーメント  $\mathbf{m}_j$  が位置  $i$  につくる磁束密度  $b_{ij}$  は

$$b_{ij} = 10^{-7} \times \frac{3(\mathbf{m}_j \cdot \mathbf{r}_{ij})\mathbf{r}_{ij}/r_{ij}^2 - \mathbf{m}_j}{r_{ij}^3} \quad (4.4)$$

<sup>\*2</sup> 設定磁場: 1.2 T, 平均磁場  $B_0$ :  $\sim 1.19967$  T。

$r_{ij}$  は、磁気モーメント  $m_j$  と位置  $i$  間の位置ベクトルである。なお、原点は磁石の中心である。(4.4) より、全ての磁気モーメントが位置  $i$  につくる磁束密度は

$$B_i = \sum_{j=1}^N b_{ij} \quad (4.5)$$

$N$  は磁気モーメントの総和である。平均磁場  $B_0$  とすると、誤差磁場  $B_{ER}$  は次式となる。

$$B_{ER} = B_i^z - B_0 \quad (4.6)$$

磁石中心における誤差磁場を Fig.4.4 に示した。

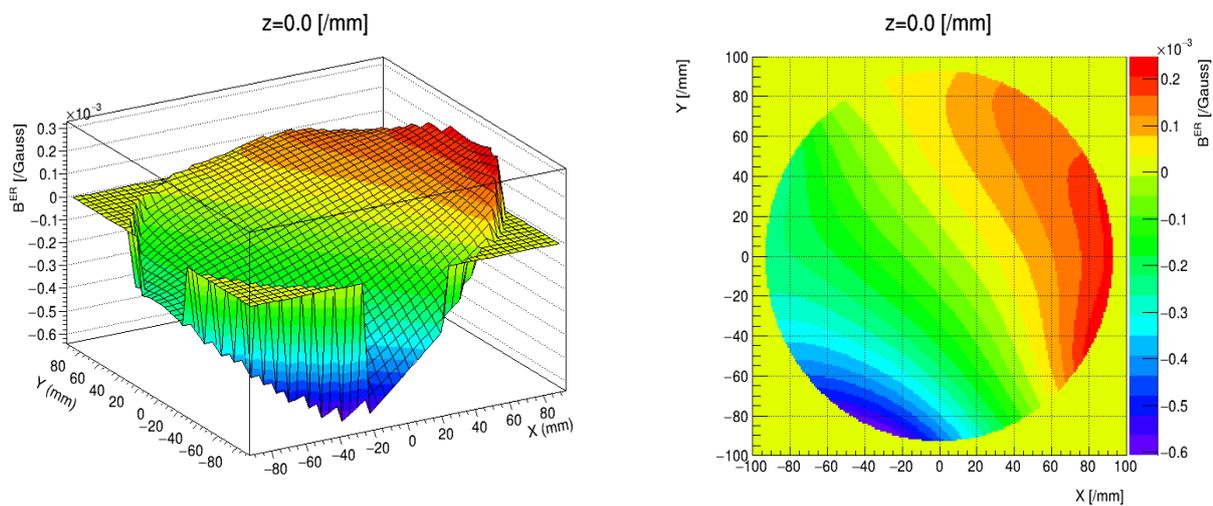


Fig.4.4 磁石がマイクロ波共振器の  $z = 0$  mm 断面につくる磁場。

ミュオン静止位置分布と共振器内部での磁石磁場の分布を重ね合わせると Fig.4.5 が得られる。Fig.4.5 よりミュオンが感じる磁場の強さの分布の幅 (FWHM) は  $\sim 1 \times 10^{-4}$  Gauss であり、強さの平均は 1.6995 T であるから、実効的な磁場の均一度は 0.006 ppm 程度となっていることがわかり、超微細構造の不確かさを 5 Hz に押さえるための要請である 0.2 ppm 以下となっていることが分かる。先行実験 [1] の磁場均一性は 0.7 ppm である。

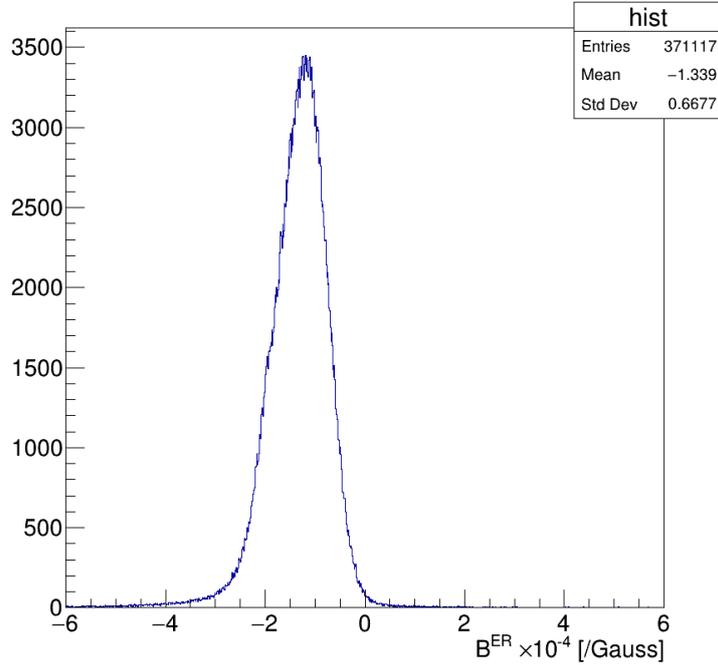


Fig.4.5 ミュオン静止位置分布から計算した磁石磁場の度数分布図。

共振器がつくるマイクロ波磁場及び磁場双極子の行列要素は以下のようにして求まる。第二章で定義した磁気双極子行列  $b$  は次式を満たす。

$$|b_{12}| = \frac{sgJ\mu_B^e + cg'_\mu\mu_B^\mu}{4\hbar} \sqrt{B_r^2 + B_\theta^2} \quad (4.7)$$

$$|b_{34}| = \frac{-sgJ\mu_B^e + cg'_\mu\mu_B^\mu}{4\hbar} \sqrt{B_r^2 + B_\theta^2} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{sgJ\mu_B^e + cg'_\mu\mu_B^\mu}{4\hbar} &= 2.258 \times 10^6 \text{ kHz/T} = 225.8 \text{ kHz/Guass} \\ \frac{-sgJ\mu_B^e + cg'_\mu\mu_B^\mu}{4\hbar} &= 1.833 \times 10^6 \text{ kHz/T} = 183.3 \text{ kHz/Guass} \end{aligned} \quad (4.9)$$

円筒形共振器では  $\text{TM}_{mn0}$  モードの磁場は次式である。

$$H_r = -A \frac{i\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{m}{r} J_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \sin m\theta \quad (4.10)$$

$$H_\theta = -A \frac{i\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{j_{mn}}{R} J'_m \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos m\theta \quad (4.11)$$

$$H_z = 0 \quad (4.12)$$

$$k_c^2 = \omega^2 \epsilon \mu = \left( \frac{j_{mn}}{R} \right)^2 \quad (4.13)$$

$R$  はキャビティの半径、 $J_m, J'_m$  はそれぞれ  $m$  次のベッセル関数およびその微係数である。また、 $j_{mn}$  は  $J_m(\xi) = 0$  の根  $\xi$  の小さい方から  $n$  番目のものである。磁場のエネルギー密度は [27]

$$\begin{aligned} H^2 &= H_r^2 + H_\theta^2 \\ &= A^2 \frac{\omega^2 \epsilon^2}{4k_c^2} \left( J_{m+1}^2 \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) + J_{m-1}^2 \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) - 2J_{m+1} \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) J_{m-1} \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos(2m\theta) \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

である。(4.15) を用いると (4.14) は (4.16) に変形できる。

$$\begin{aligned} Q &= \omega \frac{W}{P} \\ W &= \frac{1}{2} \epsilon A^2 V J_{m+1}^2(j_{mn}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$Q$  は共振器の  $Q$  値を、 $W$  はマイクロ波共振器内の電磁場エネルギーを、 $P$  は単位時間あたりに散逸するエネルギー (=マイクロ波キャビティのインプットエネルギー) をそれぞれ表している。

$$H^2 = \frac{PQ}{2\omega\mu V J_{m+1}^2(j_{mn})} \left( J_{m+1}^2 \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) + J_{m-1}^2 \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) - 2J_{m+1} \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) J_{m-1} \left( \frac{j_{mn}}{R} r \right) \cos(2m\theta) \right) \quad (4.16)$$

後述の Figure of Merit(FOM) の積分値のシミュレーション結果 (Fig.4.18, Fig.4.19) によると、マイクロ波パワー (ラビ周波数) の最適値は

$$b_{\text{con}}^{\text{MuSEUM}} \sim 150 \text{ kHz} \quad (4.17)$$

$$b_{\text{old}}^{\text{MuSEUM}} \sim 250 \text{ kHz} \quad (4.18)$$

である。本研究では  $b = 230 \text{ kHz}$  として統一している。なお、先行実験のマイクロ波パワーは  $b = 225 \text{ kHz}$  である。マイクロ波パワー 230 kHz に必要な印加パワーは

$$P_{12}^{\text{MuSEUM}} \sim 20 \text{ W} \quad (4.19)$$

$$P_{34}^{\text{MuSEUM}} \sim 120 \text{ W} \quad (4.20)$$

である。(4.19),(4.20) を用いて計算した共振器磁場を Fig.4.6, Fig.4.7 に示した。

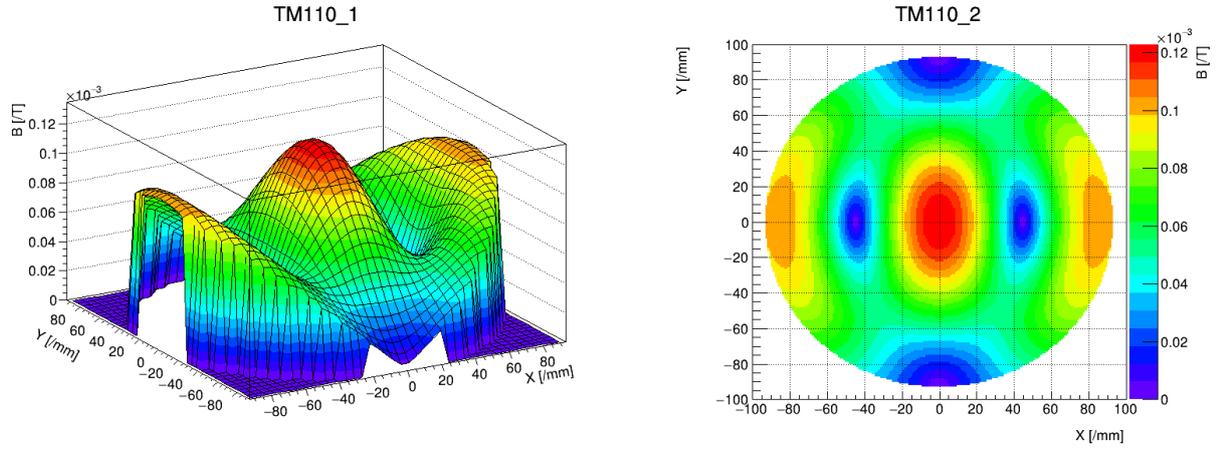


Fig.4.6 MuSEUM 高磁場マイクロ波共振器がつくる  $TM_{110}$  モード磁場 ( $P = 20 \text{ W}$ ,  $Q = 20000$ )。

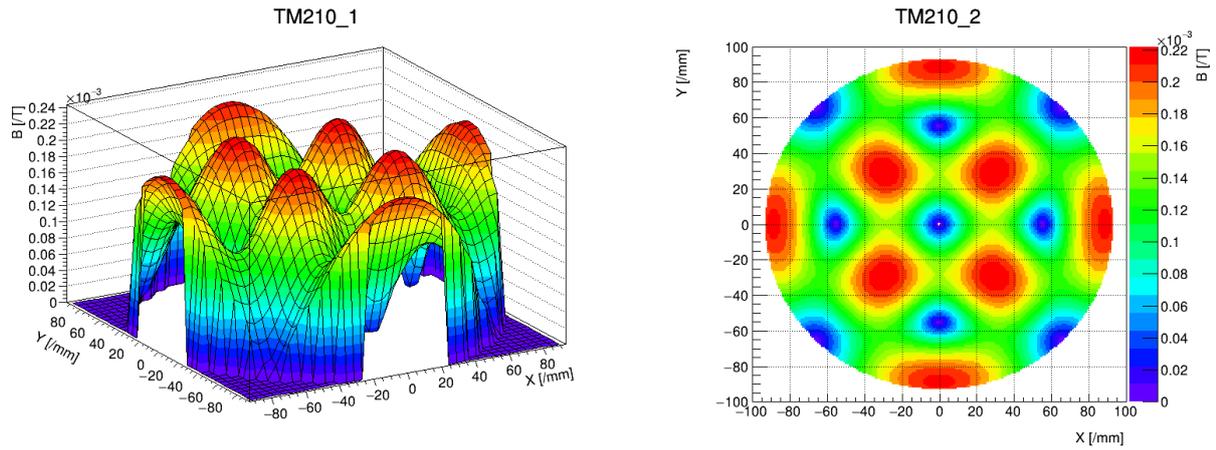


Fig.4.7 MuSEUM 高磁場マイクロ波共振器がつくる  $TM_{210}$  モード磁場 ( $P = 120 \text{ W}$ ,  $Q = 20000$ )。

Fig.4.5 と同様にしてミュオンの静止位置分布と共振器磁場とを重ね合わせることで実効的なマイクロ波パワー  $b_{\text{eff}}$  を求めることができる。Fig.4.8, Fig.4.9 はパワー実効値の計算結果である。

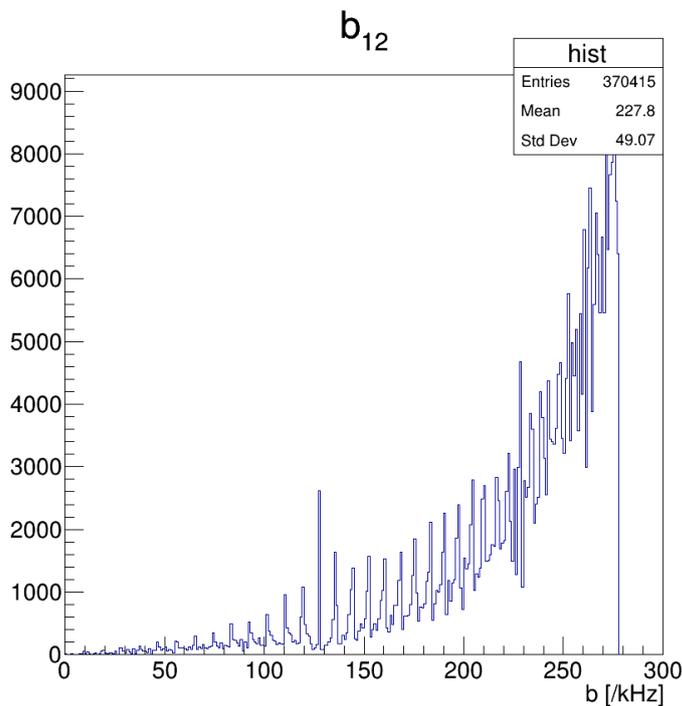
$$|b_{12}^{\text{MuSEUM}}| \simeq 227.8 \text{ kHz} \quad (4.21)$$

$$|b_{34}^{\text{MuSEUM}}| \simeq 228.5 \text{ kHz} \quad (4.22)$$

先行実験 [1] のマイクロ波磁場の大きさは

$$|B_{12}^{\text{LAMPF}}| = 0.87 \text{ Gauss} = 0.087 \times 10^3 \text{ T} \quad (4.23)$$

$$|B_{34}^{\text{LAMPF}}| = 0.80 \text{ Gauss} = 0.080 \times 10^3 \text{ T} \quad (4.24)$$

Fig.4.8 ミュオン静止位置分布から計算した  $b_{12}$  の度数分布図。

であり、Fig.4.6, Fig.4.7 に示した計算結果よりも約 2.5 倍小さい。このことは共振器の印加パワーが小さいことに起因する。先行実験の印加パワーは

$$P_{12}^{\text{LAMPF}} = 8 \text{ W} \quad (4.25)$$

$$P_{34}^{\text{LAMPF}} = 10 \text{ W} \quad (4.26)$$

である。同じ理由により先行実験のパワー実効値はその目標設定値 225 kHz よりも小さい。その  $b_{\text{eff}}$  値は

$$|b_{12}^{\text{LAMPF}}| = 194 \text{ kHz} \quad (4.27)$$

$$|b_{34}^{\text{LAMPF}}| = 147 \text{ kHz} \quad (4.28)$$

である。一方、先行実験の共振器の大きさは MuSEUM 高磁場共振器のおおよそ半分であり、同じ印加パワーでも約  $\sqrt{2}$  倍の大きさの磁場をつくるのが可能であるが、容量の小さい共振器のために MuSEUM 実験に比べてミュオンの統計量減少につながった。

立体角積分  $\int_{\Omega} \cos \theta d\Omega$ ,  $\int_{\Omega} d\Omega$  についても磁場と同様にミュオンの静止位置に依存する。以下

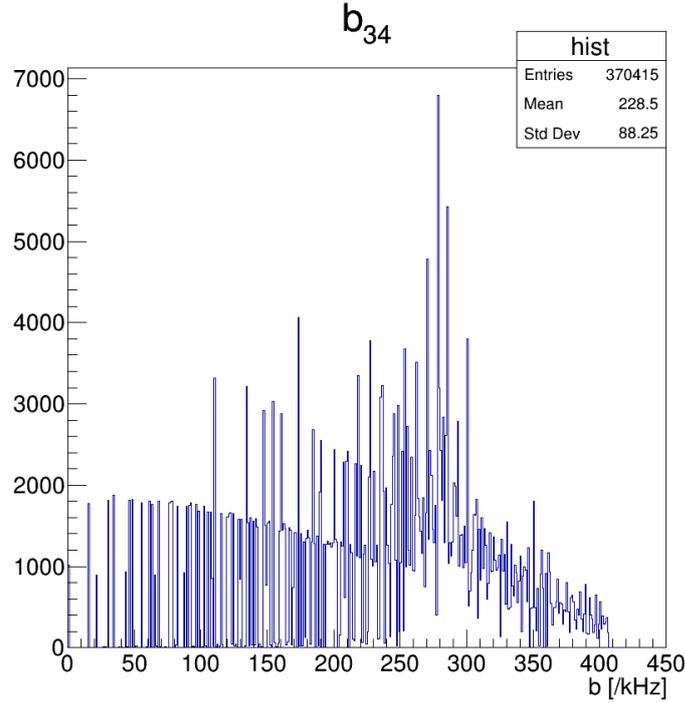


Fig.4.9 ミュオン静止位置分布から計算した  $b_{34}$  の度数分布図。

の表式を用いて同手順にて計算される [Appendix A]。

$$\int_{\Omega} \cos \theta d\Omega = \int_{-120}^{120} \int_{-120}^{120} (z - z')^2 \left\{ (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right\}^{-2} dx dy \quad (4.29)$$

$$\int_{\Omega} d\Omega = \int_{-120}^{120} \int_{-120}^{120} (z - z') \left\{ (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right\}^{-\frac{3}{2}} dx dy \quad (4.30)$$

$(x, y, z)$  と  $(x', y', z')$  はそれぞれ検出器と崩壊ミュオンの位置ベクトルである。積分範囲  $(-120 < x < 120, -120 < y < 120)$  は検出器の大きさである。なお、(4.29) 及び (4.30) は放出陽電子が直線軌道に進むことを仮定した表式である。また、共振器のフォイル部分を通り抜ける陽電子のみを計算している。

ミュオニウムの状態振幅もまたミュオンの静止位置に依存する。ある任意のミュオンに印加される磁石磁場を  $B_i^z$  とすると、(2.9), (2.20), (2.21) は

$$x_i = \frac{(-g'_\mu \mu_B^\mu + g J \mu_B^e) B_i^z}{h \Delta \nu} \quad (4.31)$$

$$s_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_i^2}} \right)^{1/2} \quad (4.32)$$

$$c_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_i^2}} \right)^{1/2} \quad (4.33)$$

となる。これを用いて (2.37), (2.39) は次のようにして計算できる。

$$\rho_{22}(0)^i = \frac{1 + P(s_i^2 - c_i^2)}{4} \quad (4.34)$$

$$\rho_{44}(0)^i = \frac{1 + P(c_i^2 - s_i^2)}{4} \quad (4.35)$$

以上のように各ミュオンの静止位置での物理量を求めることができる。

### 4.1.3 手続き 3

木構造でデータを構築する TTree クラス [36] を用いて手続き 1, 2 で求めた物理量を ROOT File に格納する。以降は前述のデータファイルをランファイルという。シミュレーションによって得られたランファイルは、実際の実験における実験データに相当するものである。実際のランファイルを Fig.4.10 に示した。

```
*****
* Row * Instance * muon_vec * muon_disp * positron_ * positron_ * field * state_amp * Angle *
*****
* 0 * 0 * 4727.61 * 0 * 4727.61 * 51781.4 * 1.6999999 * 0 * 0.3302032 *
* 0 * 1 * -7.71645 * 0.0355885 * -7.71645 * 0.194563 * 6.303e-05 * 0.4989229 * 0.3398000 *
* 0 * 2 * -0.262523 * -0.993785 * -0.262523 * -0.720346 * 142.36243 * 0.5 *
* 0 * 3 * 1146 * 0.105471 * 1146 * 0.665768 * * 0.0010770 *
* 1 * 0 * 4612.64 * 0 * 4612.64 * 48232.4 * 1.6999999 * 0 * 0.3521629 *
* 1 * 1 * 21.8506 * -0.284514 * 21.8506 * -0.678571 * 4.787e-05 * 0.4989229 * 0.3635421 *
* 1 * 2 * -0.460513 * -0.921368 * -0.460513 * -0.730053 * 108.13140 * 0.5 *
* 1 * 3 * 1161.02 * 0.264825 * 1161.02 * 0.0810204 * * 0.0010770 *
* 2 * 0 * 184.392 * 0 * 184.392 * 24388.1 * 1.6999999 * 0 * 0.2871681 *
* 2 * 1 * 4.90927 * -0.739904 * 4.90927 * -0.421781 * 6.011e-05 * 0.4989229 * 0.2945961 *
* 2 * 2 * 18.7926 * -0.656334 * 18.7926 * -0.906109 * 135.75796 * 0.5 *
* 2 * 3 * 1114.81 * -0.147536 * 1114.81 * 0.0326601 * * 0.0010770 *
* 3 * 0 * 2641.96 * 0 * 2641.96 * 24073.3 * 1.6999999 * 0 * 0.2635995 *
* 3 * 1 * -12.2852 * -0.250572 * -12.2852 * -0.668166 * 4.364e-05 * 0.4989229 * 0.2705745 *
* 3 * 2 * -38.5353 * 0.857594 * -38.5353 * -0.002486 * 98.564056 * 0.5 *
* 3 * 3 * 1096.83 * -0.449161 * 1096.83 * 0.744008 * * 0.0010770 *
* 4 * 0 * 1320.05 * 0 * 1320.05 * 35048.8 * 1.6999999 * 0 * 0.3440279 *
* 4 * 1 * 12.7231 * 0.437088 * 12.7231 * 0.0611778 * 5.904e-05 * 0.4989229 * 0.3545887 *
* 4 * 2 * 4.74948 * 0.881965 * 4.74948 * 0.24337 * 133.33968 * 0.5 *
* 4 * 3 * 1155.28 * -0.176326 * 1155.28 * -0.968002 * * 0.0010770 *
* 5 * 0 * 1129.09 * 0 * 1129.09 * 19120.6 * 1.6999999 * 0 * 0.2945212 *
* 5 * 1 * -14.2383 * 0.479068 * -14.2383 * 0.986234 * 5.677e-05 * 0.4989229 * 0.3022508 *
* 5 * 2 * 6.84411 * -0.571722 * 6.84411 * -0.127317 * 128.23066 * 0.5 *
* 5 * 3 * 1120.46 * 0.666054 * 1120.46 * 0.10551 * * 0.0010770 *
```

Fig.4.10 TM110 モードのランファイルの内容 (0~5 番目のエントリまでを取り出した)。三列目と五列目は崩壊ミュオンと陽電子の 4 元ベクトル ( $t, x, y, z$ ) である。四列目と六列目は崩壊ミュオンと陽電子の分散関係 ( $E, P_x/|P|, P_y/|P|, P_z/|P|$ ) である。七、八、九列目はそれぞれミュオンの静止位置における磁場 ( $B_{\text{magnet}}, B_{\text{cavity}}, b$ )、ミュオニウムの状態振幅 ( $a_1(0)^2, a_2(0)^2, a_3(0)^2, a_4(0)^2$ )、立体角積分 ( $\int_{\Omega} \cos \theta d\Omega, \int_{\Omega} d\Omega$ ) である。

#### 4.1.4 手続き 4

ランファイルの各エントリー陽電子の観測確率  $P_{\text{on}}(\text{RF:ON})$ ,  $P_{\text{off}}(\text{RF:OFF})$  を求める。  $i$  番目の陽電子の確率  $P_{\text{on}}^i, P_{\text{off}}^i$  は以下の等式を満たす。

$$P_{\text{on}}^i(t_i) = \frac{y_i^2}{4\pi} \left( (3 - 2y_i) \int_{\Omega} d\Omega_i + (2y_i - 1) P_{z0i}^{\text{on}}(t_i) \int_{\Omega} \cos \theta d\Omega_i \right) \quad (4.36)$$

$$P_{\text{off}}^i(t_i) = \frac{y_i^2}{4\pi} \left( (3 - 2y_i) \int_{\Omega} d\Omega_i + (2y_i - 1) P_{z0i}^{\text{off}}(t_i) \int_{\Omega} \cos \theta d\Omega_i \right) \quad (4.37)$$

$i$  番目のエントリーミュオンの平均スピン偏極  $P_{z0i}^{\text{on}}(t_i), P_{z0i}^{\text{off}}(t_i)$  は次のようにして求められる。

$$a_{1i}(t_i)^2 = a_{1i}(0)^2 \left[ \cos\left(\frac{\Gamma_i t_i}{2}\right)^2 + \frac{\Delta\omega^2}{\Gamma_i^2} \sin\left(\frac{\Gamma_i t_i}{2}\right)^2 \right] + a_{2i}(0)^2 \left[ \frac{4b_i^2}{\Gamma_i^2} \sin\left(\frac{\Gamma_i t_i}{2}\right)^2 \right] \quad (4.38)$$

$$a_{2i}(t_i)^2 = a_{2i}(0)^2 \left[ \cos\left(\frac{\Gamma_i t_i}{2}\right)^2 + \frac{\Delta\omega^2}{\Gamma_i^2} \sin\left(\frac{\Gamma_i t_i}{2}\right)^2 \right] + a_{1i}(0)^2 \left[ \frac{4b_i^2}{\Gamma_i^2} \sin\left(\frac{\Gamma_i t_i}{2}\right)^2 \right] \quad (4.39)$$

$$\Gamma_i = \sqrt{\Delta\omega + 4b_i^2} \quad (4.40)$$

$$P_{z0i}^{\text{on}}(t_i) = 2(a_{1i}(t_i)^2 - a_{2i}(t_i)^2) \quad (4.41)$$

$$P_{z0i}^{\text{off}}(t_i) = 2(a_{1i}(0)^2 - a_{2i}(0)^2) \quad (4.42)$$

$P_{\text{on}}^i(t_i), P_{\text{off}}^i(t_i)$  を用いてシミュレーションの共鳴曲線は以下のように定義される。

$$S_{\text{sim}} = \frac{\sum_i P_{\text{on}}^i(t_i)}{\sum_i P_{\text{off}}^i(t_i)} - 1 = \frac{N_{\text{on}}}{N_{\text{off}}} - 1 \quad (4.43)$$

$P_{\text{on}}^i(t_i), P_{\text{off}}^i(t_i)$  はランファイルの  $i$  番目のエントリー値を用いて計算される。(4.43) の不確かさは誤差伝搬の表式を用いて計算される。

$$\begin{aligned} dS_{\text{th}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial S_{\text{th}}}{\partial N_{\text{on}}}\right)^2 dN_{\text{on}}^2 + \left(\frac{\partial S_{\text{th}}}{\partial N_{\text{off}}}\right)^2 dN_{\text{off}}^2} \\ &= \frac{N_{\text{on}}}{N_{\text{off}}} \sqrt{\left(\frac{dN_{\text{on}}}{N_{\text{on}}}\right)^2 + \left(\frac{dN_{\text{off}}}{N_{\text{off}}}\right)^2} \end{aligned} \quad (4.44)$$

$\Delta N_{\text{on}} \sim \sqrt{N_{\text{on}}}, \Delta N_{\text{off}} \sim \sqrt{N_{\text{off}}}$  より次式が得られる。

$$\Delta S_{\text{sim}} = \frac{N_{\text{on}}}{N_{\text{off}}} \sqrt{\frac{1}{N_{\text{on}}} + \frac{1}{N_{\text{off}}}} \quad (4.45)$$

フィッティング曲線は以下のパラメータ  $\text{offset}(S_0)$ ,  $\text{scaling}(S_1)$ ,  $\text{center}(\Delta\omega)$ ,  $\text{power}(b_{\text{eff}})$  を用いて次式で表される。

$$S_{\text{fit}} = S_0 + S_1 S_{\text{th}}(\Delta\omega, b_{\text{eff}}) \quad (4.46)$$

フィッティングの  $\chi^2$  検定は次式である。

$$\chi^2 = \sum_i \left( \frac{S_{\text{sim}}(\omega_i) - S_{\text{fit}}(\omega_i)}{\Delta S(\omega_i)} \right)^2 \quad (4.47)$$

Old Muonium 法は陽電子の観測時間を決定する必要がある。Fig.2.3 からわかるようにミュオニウムの形成時刻の約  $12 \mu\text{s}$  後にほぼ全てのミュオンが崩壊する。そのため、Conventional 法と同程度の統計量にするためには観測時間帯 ( $0 \leq t < 12$ ) に複数の時間窓を設けなければならない。本研究では観測スタート時間を  $t_1$ 、観測ストップ時間は  $1 \mu\text{s}$  後の  $t_1 + 1 (= t_2)$  としてシミュレーションを行った。そして、前述の観測時間帯に 10 個の時間窓を設けた。

Fig.4.11 は共鳴曲線の線幅 (Full Width at Half Maximum:FWHM) とスタート時間  $t_1$  との関係を表している。ミュオンの自然幅  $145 \text{ kHz}$  よりもせまい線幅を得るためには  $t_1$  を  $5.6 \mu\text{s}$  後に設定しなければならない。観測時間内に崩壊したミュオンを選出するためには、ランファイルの第一列に格納されている崩壊時間  $t_{\text{decay}}$  を用いた。GEANT4 によるミュオンの発生時刻からミュオニウムの形成までに必要な時間は十分に小さいと見なし、 $t_1 \leq t_{\text{decay}} \leq t_2$  を満たすミュオンのみを Old Muonium 法のシミュレーション計算に用いた。

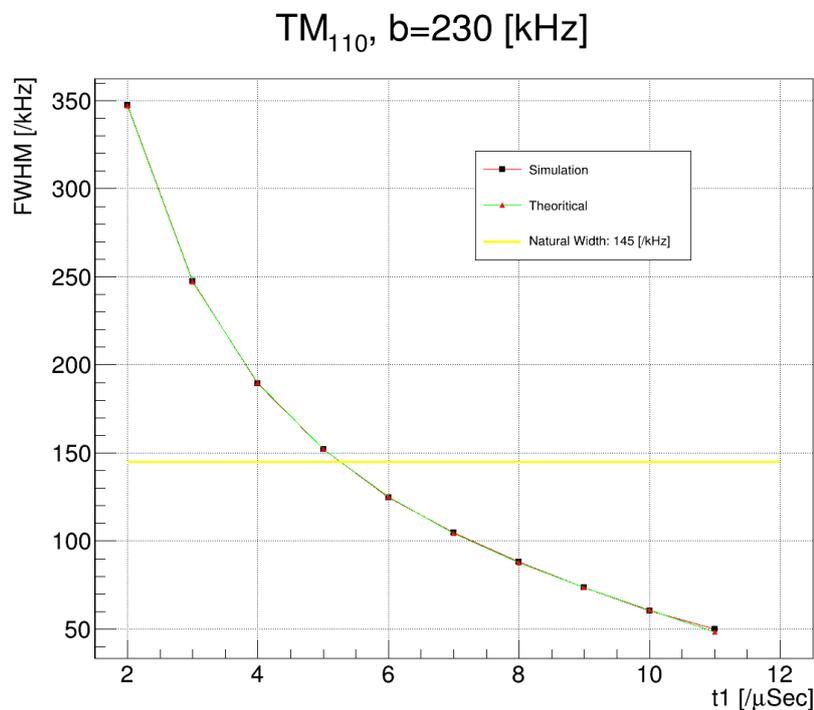


Fig.4.11 共鳴曲線の線幅と観測スタート時間  $t_1$  の関係。不確定性関係により寿命の長いミュオンを観測することにより共鳴の線幅が狭まる。

周波数の掃引範囲は  $-200 \sim 200 \text{ kHz}$  で、40 ポイントが含まれている。1 ポイントの測定時間は 20 分 (RF ON:10 min, RF OFF:10 min) であり、400,000 pulses が 1 ポイントに費やされる。

一回の共鳴実験は約 13.33 時間である。

以上の手続きに基づくシミュレーション結果を Fig.4.12, Fig.4.13, Fig.4.14, Fig.4.15 に示した。

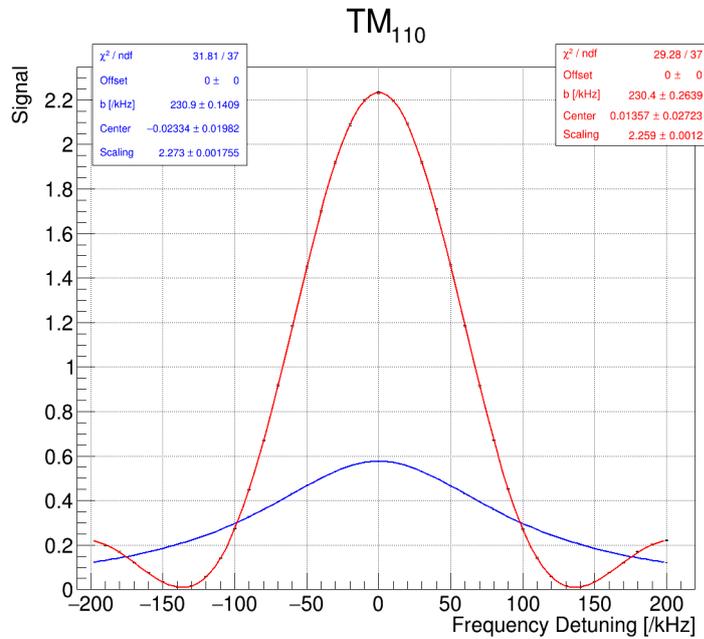


Fig.4.12 Conventional 法 (青) vs Old Muonium 法 (赤,  $t_1 = 6 \mu\text{s}$ ,  $t_2 = 7 \mu\text{s}$ )。

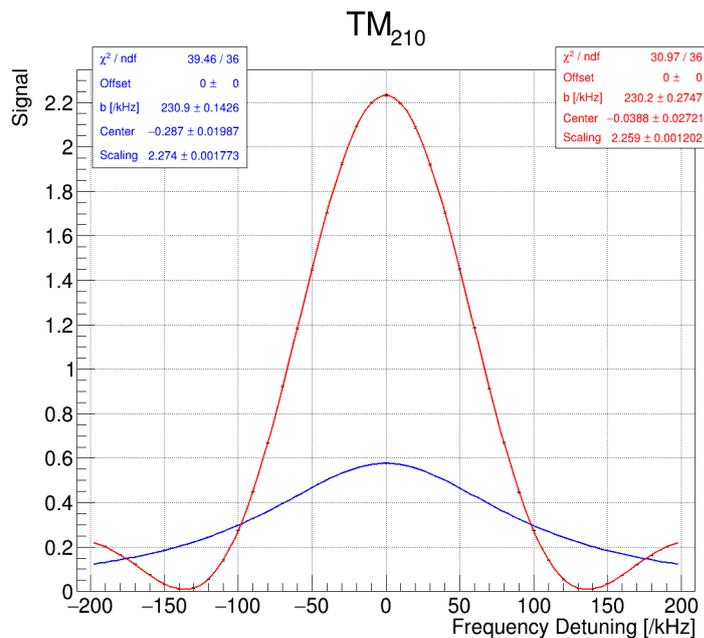


Fig.4.13 Conventional 法 (青) vs Old Muonium 法 (赤,  $t_1 = 6 \mu\text{s}$ ,  $t_2 = 7 \mu\text{s}$ )。

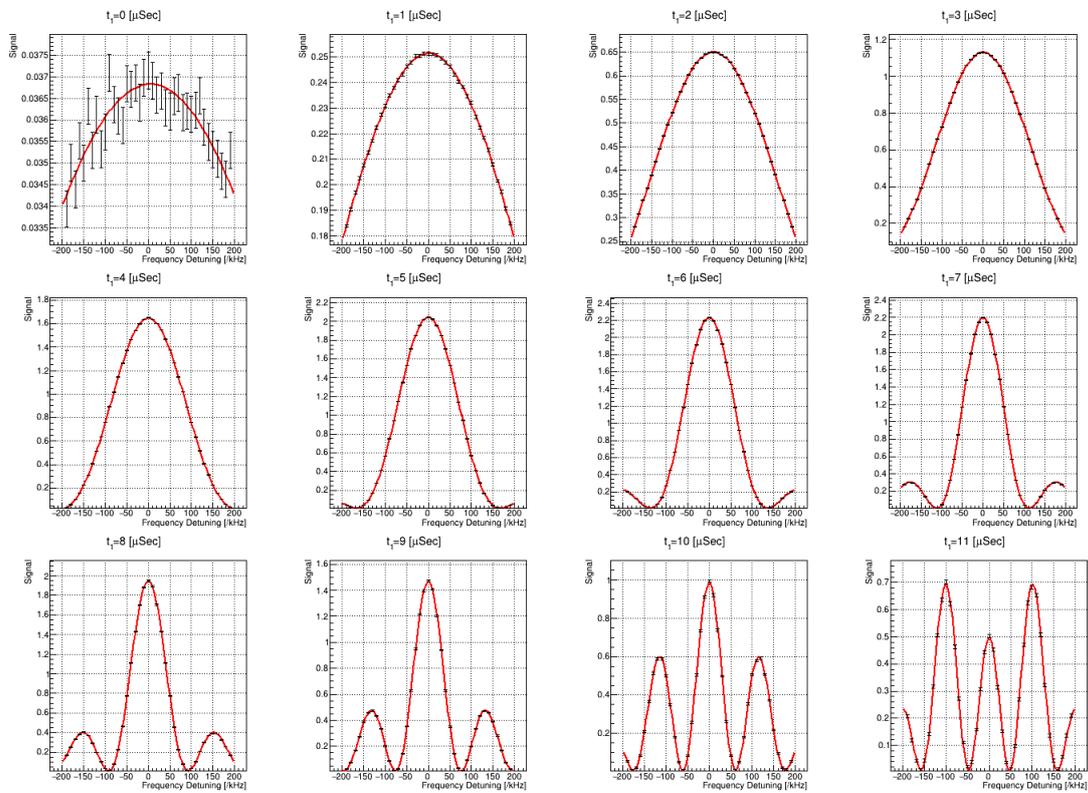


Fig.4.14 各時間窓で観測した共鳴曲線 (TM<sub>110</sub> モード)。時間の経過にしたがって、線幅が狭まってゆく。

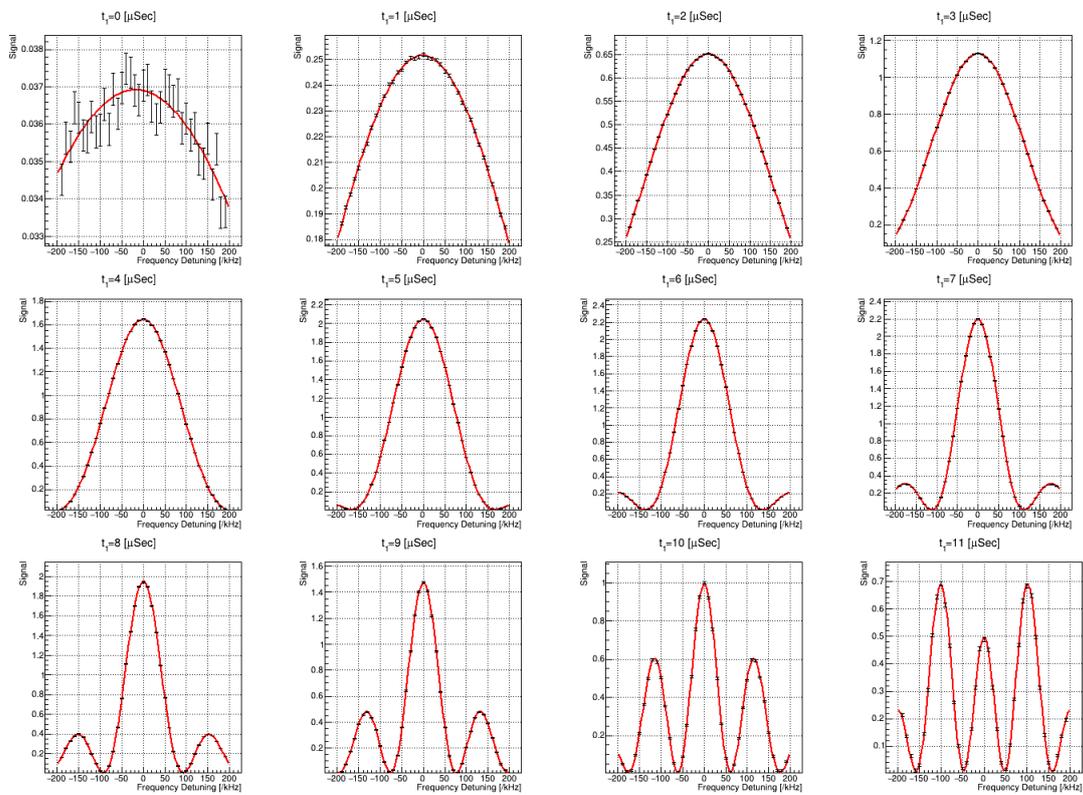


Fig.4.15 各時間窓で観測した共鳴曲線 ( $TM_{210}$  モード)。

## 4.1.5 手続き 5

系統的不確かさは、ランファイルの各エントリーに相応のシフトを加えた後に、再度解析することで導出することができる。

## 4.2 Figure of Merit

(4.48) は共鳴曲線の Figure of Merit(FOM) である。 $t_1$  の増加に従って  $N_{on}$  は減少し、一方で曲線の尖度  $(S_{MAX} + 1)/FWHM$  は増加する。FOM は二つの利得の競合である。Old Muonium 法の各時間窓の FOM のシミュレーション結果を Fig.4.16, Fig.4.17 に示した。FOM の定義できないところ (例えば、 $b = 270$  kHz の  $t_1 = 11 \mu s$ )<sup>\*3</sup>は省略した。

$$FOM = \frac{N_{on} \times (S_{MAX} + 1)^2}{FWHM^2} \quad (4.48)$$

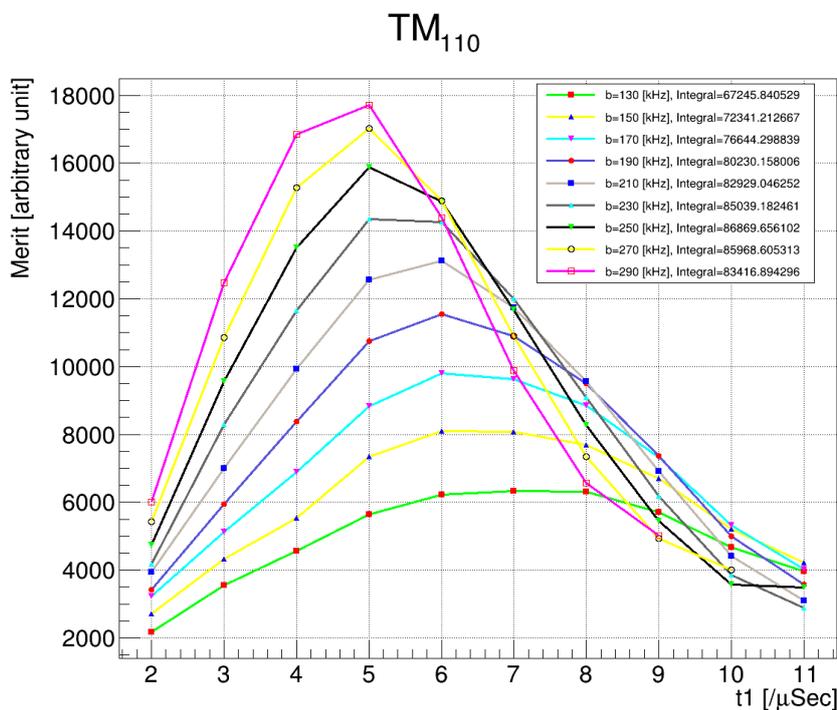


Fig.4.16 マイクロ波パワーに対する時間窓ごとの FOM(TM<sub>110</sub> モード)。

<sup>\*3</sup> FOM を定義できない原因は、サイドピークが中心に引きよせられ、原点ピークを観測できないことに起因する。

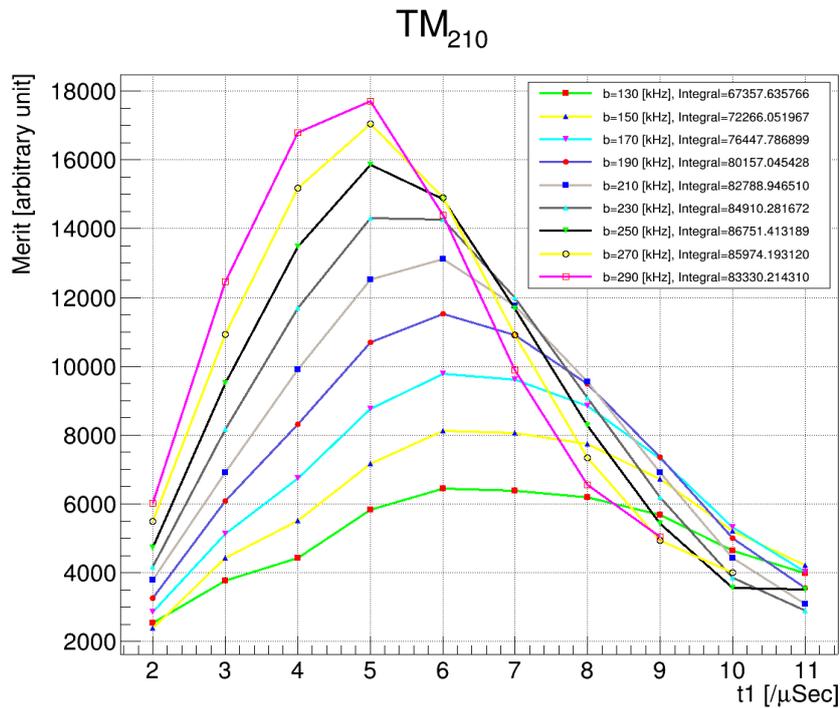


Fig.4.17 マイクロ波パワーに対する時間窓ごとの FOM(TM<sub>210</sub> モード)。

Old Muonium 法では複数の時間窓を合わせて解析を行う。そのための FOM の積分値を Fig.4.18, Fig.4.19 に示した。FOM が最大になるマイクロ波パワーは

$$b^{\text{con}} \sim 150 \text{ kHz}$$

$$b^{\text{old}} \sim 250 \text{ kHz}$$

である。 $b = 230 \text{ kHz}$  における Conventional 法と Old Muonium 法との FOM の比は

$$\frac{\int_2^{11} \text{FOM}_{12}^{\text{old}} dt_1}{\text{FOM}_{12}^{\text{con}}} \sim 1.3 \quad (4.49)$$

$$\frac{\int_2^{11} \text{FOM}_{34}^{\text{old}} dt_1}{\text{FOM}_{34}^{\text{con}}} \sim 1.3 \quad (4.50)$$

である。一方、先行実験の Conventional 法と Old Muonium 法との FOM の比は

$$\frac{\int_0^{11} \text{FOM}_{12}^{\text{old}} dt_1}{\text{FOM}_{12}^{\text{con}}} \sim 1.13 \quad (4.51)$$

である。

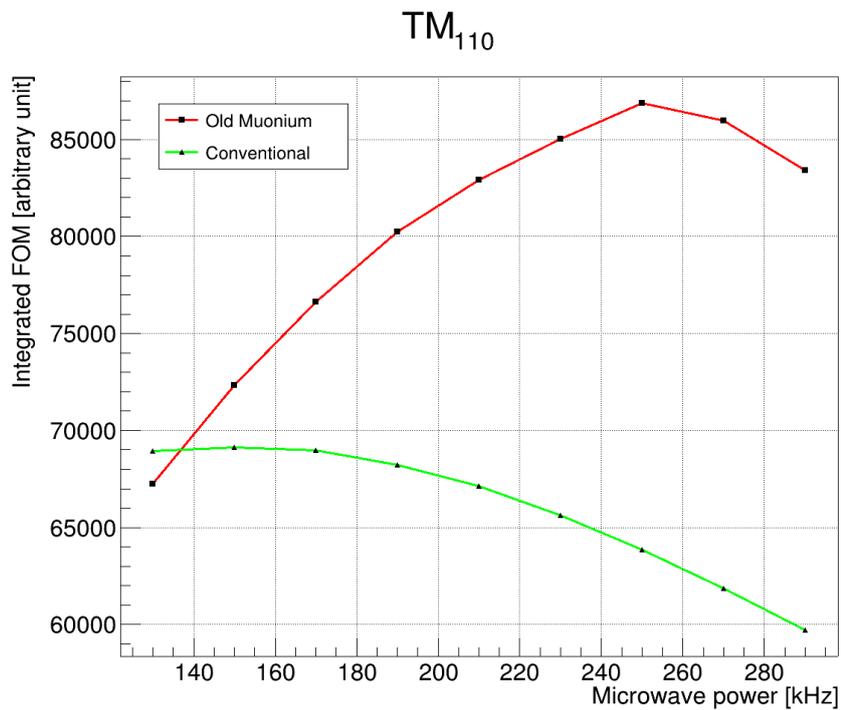


Fig.4.18 マイクロ波パワーに対する FOM の積分値 ( $TM_{110}$  モード)。緑は Conventional 法、赤は Old Muonium 法を表している。

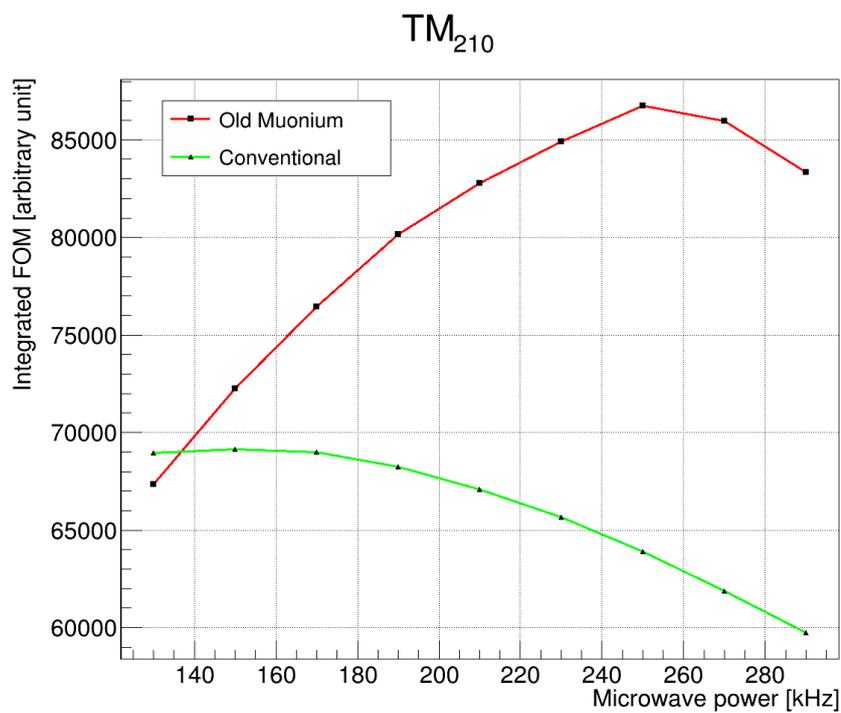


Fig.4.19 マイクロ波パワーに対する FOM の積分値 ( $TM_{210}$  モード)。緑は Conventional 法、赤は Old Muonium 法を表している。

## 4.3 シミュレーションの妥当性

### 4.3.1 Conventional 法

Convention 法の共鳴曲線は

$$S_{\text{the}}^{\text{con}} = \frac{2b^2}{\Gamma^2 + \gamma^2} \quad (4.52)$$

ON resonance において共鳴曲線はピークに達するので、共鳴ピークは次式となる。

$$S_{\text{MAX}} = \frac{2b^2}{4b^2 + \gamma^2} \quad (4.53)$$

(4.54) より Convention 法のピーク値は増加関数である。

$$\frac{dS_{\text{MAX}}}{db} = \frac{4b\gamma^2}{(4b^2 + \gamma^2)^2} \quad (4.54)$$

フィッティング曲線から求めた  $S_{\text{MAX}}$  及び (4.53) を Fig.4.20 に示した。

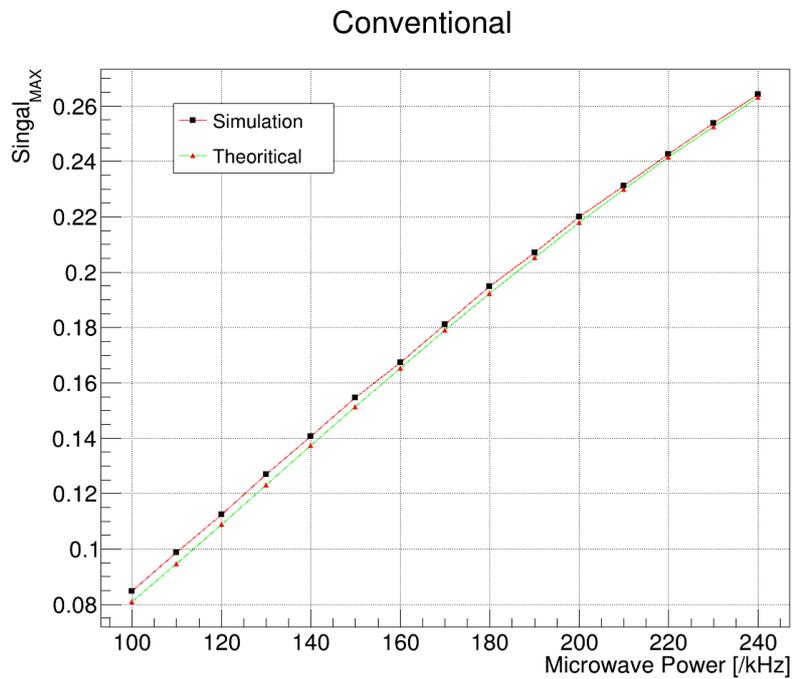


Fig.4.20 Signal<sub>MAX</sub> vs マイクロ波パワー (Conventional 法)。

共鳴曲線の FWHM(Full Width at Half Maximum) は次式である。

$$\Delta f_{1/2} = \frac{\sqrt{4b^2 + \gamma^2}}{\pi} \quad (4.55)$$

パワー拡がり (power broadening) がなければミュオンの自然幅が得られる。

$$\Delta f_{1/2}(b=0) = \frac{\gamma}{\pi} = 145 \text{ kHz} \quad (4.56)$$

Conventional 法は、パワー拡がりによって必ずミュオンの自然幅よりも大きい線幅が得られる。フィッティング曲線から求めた FWHM 及び (4.55) を Fig.4.21 に示した。Fig.4.20 及び Fig.4.21 は、Conventional 法におけるシミュレーション結果と理論式がいずれもよく一致していることを示している。

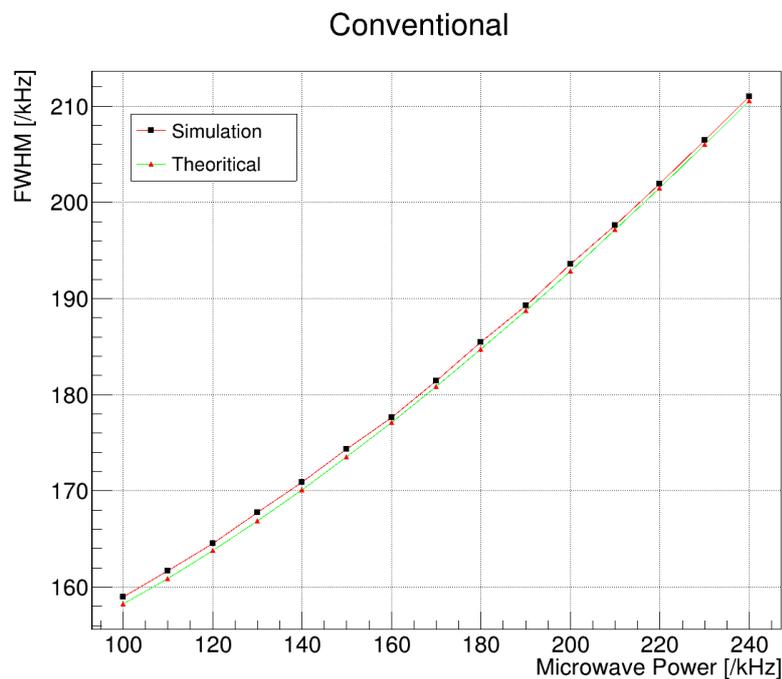


Fig.4.21 パワー拡がり:FWHM vs マイクロ波パワー (Conventional 法)。パワー拡がりにより線幅は広がる。

### 4.3.2 Old Muonium 法

Old Muonium 法の共鳴曲線は、(2.65) を用いて

$$S_{\text{the}}^{\text{old}} = \frac{L_{\text{the}}^{\text{old}}}{e^{-\gamma t_1} - e^{-\gamma t_2}} \quad (4.57)$$

と表せる。 $L_{\text{the}}^{\text{old}}$  を一次の項までテーラー展開すると次式が得られる。

$$L_{\text{old}} = \frac{2b^2}{\Gamma^2} (1 - \cos \Gamma t_1) \gamma e^{-\gamma t_1} \delta t \quad (4.58)$$

(4.58) を用いて (4.57) は以下のように近似できる。

$$S_{\text{the}}^{\text{old}} \sim \frac{2b^2}{\Gamma^2} (1 - \cos \Gamma t_1) \quad (4.59)$$

一般化ラビ周波数  $\Gamma$  が以下の条件を満たすときに (4.59) は極大値をとる。

$$\Gamma = \frac{(2n+1)\pi}{t_1} \quad (4.60)$$

$\Gamma = \sqrt{\Delta\omega + 4b^2}$  を (4.60) に代入すると共鳴曲線の各ピークを中心値  $\Delta\omega_n$  が得られる。

$$\Delta\omega_n = \sqrt{\left(\frac{(2n+1)\pi}{t_1}\right)^2 - 4b^2} \quad (4.61)$$

$n=0$  と  $n \neq 0$  はそれぞれ原点ピークとサイドピークに対応する。マイクロ波パワーを大きくすると、正のサイドピークを中心値  $\Delta\omega_n$  は小さくなる (負は逆)。その結果、サイドピークは原点に引き寄せられ、FWHM が減少する (Fig.4.22)。Fig.4.22 をみると、共鳴曲線の包絡線の FWHM はパワー拡がりの影響をうけるが、原点ピークの FWHM の減少が確かめられる。

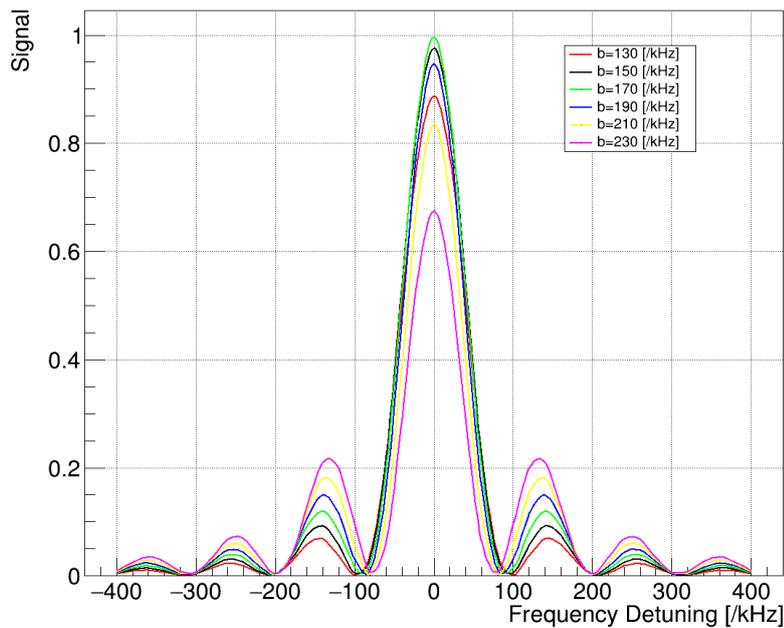


Fig.4.22 マイクロ波パワーを変化させたときの Old Muonium 法の共鳴曲線 ( $t_1 = 9 \mu\text{s}$ ,  $t_2 = 10 \mu\text{s}$ )。パワーの上昇によってサイドピークが原点に引き寄せられる。

ON Resonance における中心ピークの最大値は

$$S_{\text{MAX}} \sim \frac{1 - \cos 2bt_1}{2} \quad (4.62)$$

Old Muonium 法では共鳴曲線のピーク値はマイクロ波パワーの周期関数となる。

Conventional 法と同様にシミュレーションの結果を検討する。理論式 (4.57) から求めた  $S_{\text{MAX}}$  と FWHM と、フィッティング曲線から求めた  $S_{\text{MAX}}$  と FWHM とをそれぞれ Fig.4.23, Fig.4.24 に図示した。シミュレーションと理論式とがよく一致することが確かめられた。

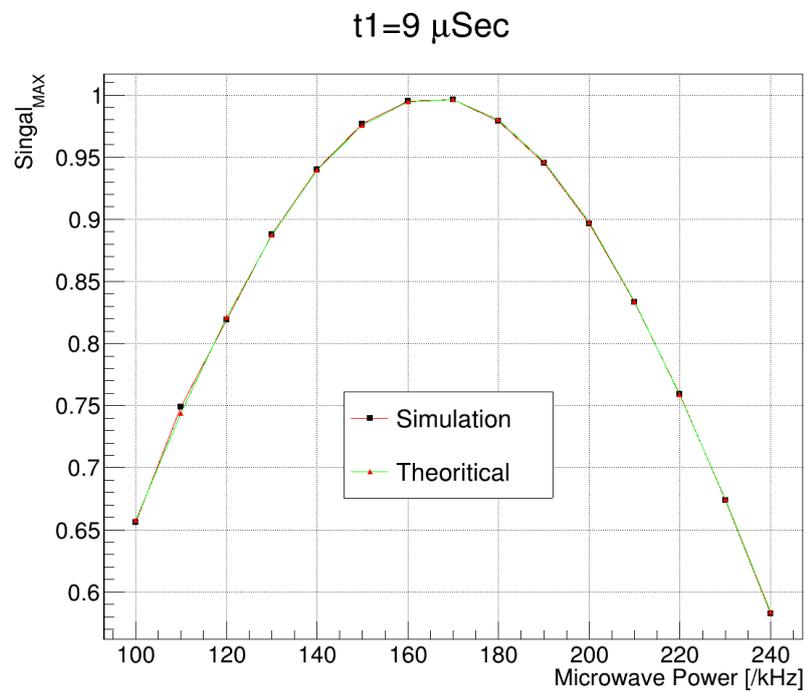
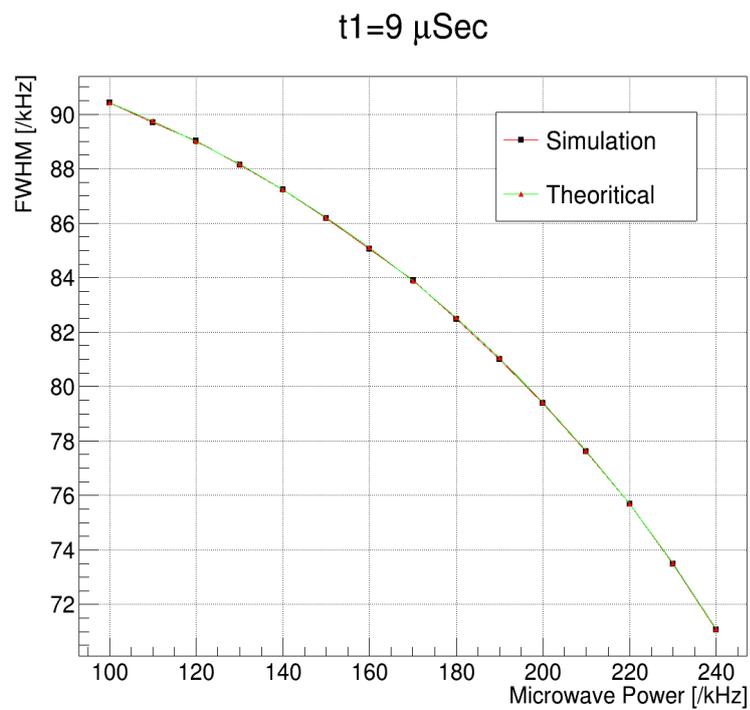


Fig.4.23 FWHM vs マイクロ波パワー (Old Muonium 法)。

Fig.4.24 Signal<sub>MAX</sub> vs マイクロ波パワー (Old Muonium 法)。Conventional 法とは異なり、パワーの増加にともない線幅は減少する。

## 4.4 統計的不確かさ

統計的不確かさはフィッティングパラメータ  $\text{center}(\Delta\omega)$  の決定精度から求められる。本研究は、各モードについて仮想の共鳴実験を 100 回 ( $13.33 \text{ hours} \times 100 \approx 56 \text{ days}$ ) 行い、その結果から MuSEUM 実験の統計的不確かさの導出を試みる。

### 4.4.1 Conventional 法

TM<sub>110</sub> モード及び TM<sub>210</sub> モードで仮想実験を 100 回行ったときのシミュレーション結果を Fig.4.25, Fig.4.26 に示した。Fig.4.25, Fig.4.26 に対して定数関数でフィッティングを行うと (4.63), (4.64) が得られる。(4.63), (4.64) はそれぞれ TM<sub>110</sub> モード及び TM<sub>210</sub> モードの 100 回の仮想実験による統計的不確かさを表している。(4.65) は両者の二乗和の根号をとったものである。

$$\Delta\nu_{12}^{\text{con}} = 2.0 \text{ Hz} \quad (4.63)$$

$$\Delta\nu_{34}^{\text{con}} = 2.2 \text{ Hz} \quad (4.64)$$

$$\delta\Delta\nu^{\text{con}} = 3.0 \text{ Hz} \quad (4.65)$$

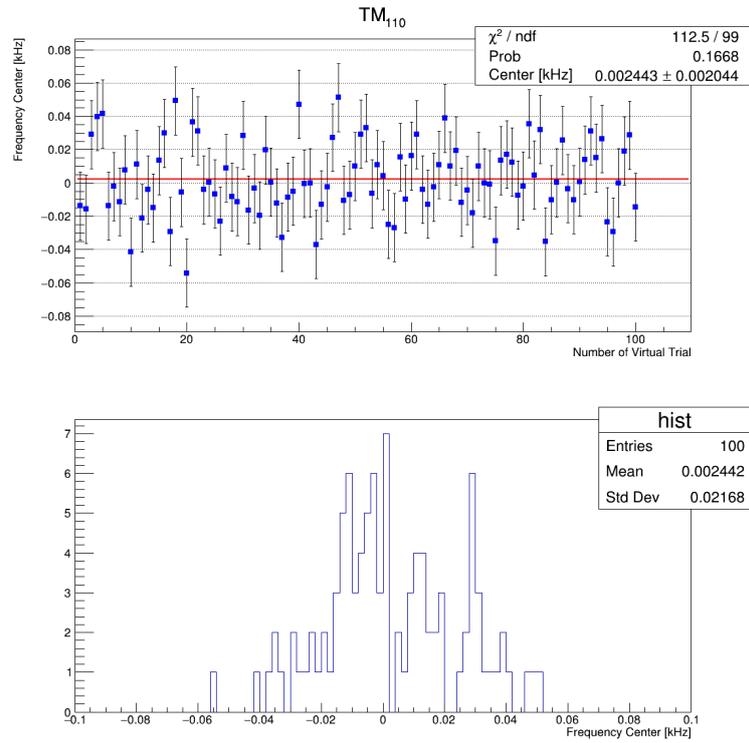
### 4.4.2 Old Muonium 法

1 回の共鳴測定に、計 10 個の時間窓 ( $t_1 = 2 \sim t_1 = 11$ ) を設けて TM<sub>110</sub> モード、TM<sub>210</sub> モードを観測した際のシミュレーション結果を Fig.4.27, Fig.4.28 に示した。Fig.4.27, Fig.4.28 に対して定数関数でフィッティングを行うと (4.66), (4.67) が得られる。(4.66), (4.67) はそれぞれ Old Muonium 法における 1 回の共鳴シミュレーションがもつ統計的不確かさを表している。

$$\Delta\nu_{12}^{\text{old}} = 12.7 \text{ Hz} \quad (4.66)$$

$$\Delta\nu_{34}^{\text{old}} = 11.1 \text{ Hz} \quad (4.67)$$

Conventional 法と同様に仮想実験を 100 回行った後に定数関数でフィッティングした結果を Fig.4.29, Fig.4.30 に示した。Fig.4.29, Fig.4.30 から (4.68), (4.69) が求まり、それぞれ TM<sub>110</sub> モード及び TM<sub>210</sub> モードの 100 回の仮想実験による統計的不確かさを表している。(4.68), (4.69) をみると、不確かさが (4.66), (4.67) の約 10 倍改善できていることがわかる。また、(4.63), (4.64) 及び (4.68), (4.69) を比較してわかるように、いずれのモードにおいても、FOM のシミュレーション結果が示唆するとおり、Old Muonium 法がより統計的に優位であること

Fig.4.25 TM<sub>110</sub> モードで仮想実験を 100 回行った結果。

が確かめられた。(4.70) は (4.68) と (4.69) の二乗和の根号をとったものである。

$$\Delta\nu_{12}^{\text{old}} = 1.1 \text{ Hz} \quad (4.68)$$

$$\Delta\nu_{34}^{\text{old}} = 1.3 \text{ Hz} \quad (4.69)$$

$$\delta\Delta\nu^{\text{old}} = 1.7 \text{ Hz} \quad (4.70)$$

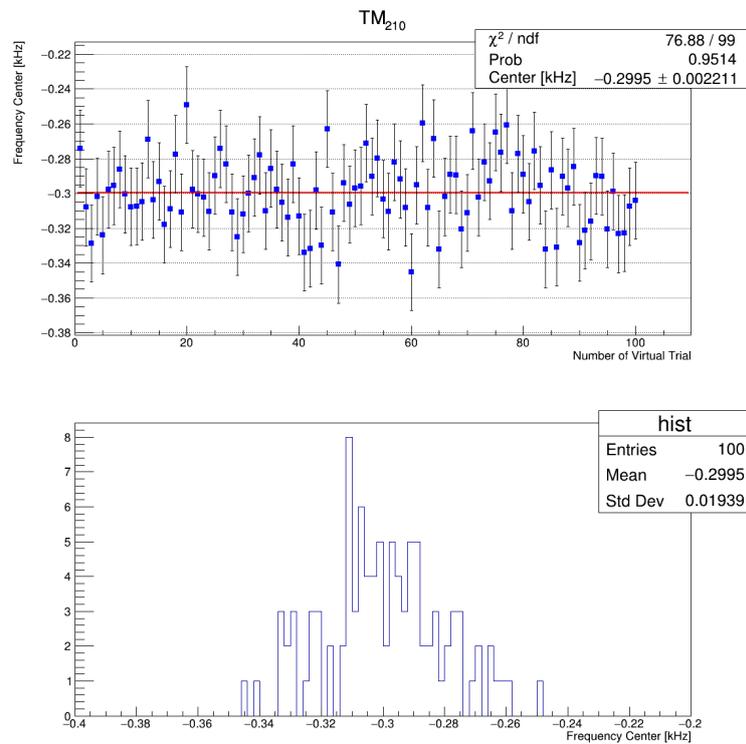


Fig.4.26 TM<sub>210</sub> モードで仮想実験を 100 回行った結果。

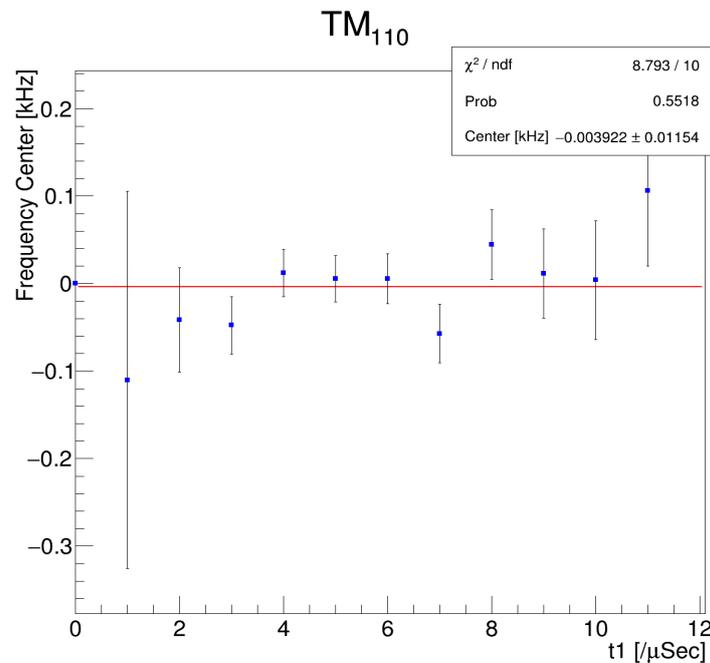


Fig.4.27 10 個の時間窓で Old Muonium 法 (TM<sub>110</sub> モード) を行ったときの結果。定数関数でフィッティングを行った。

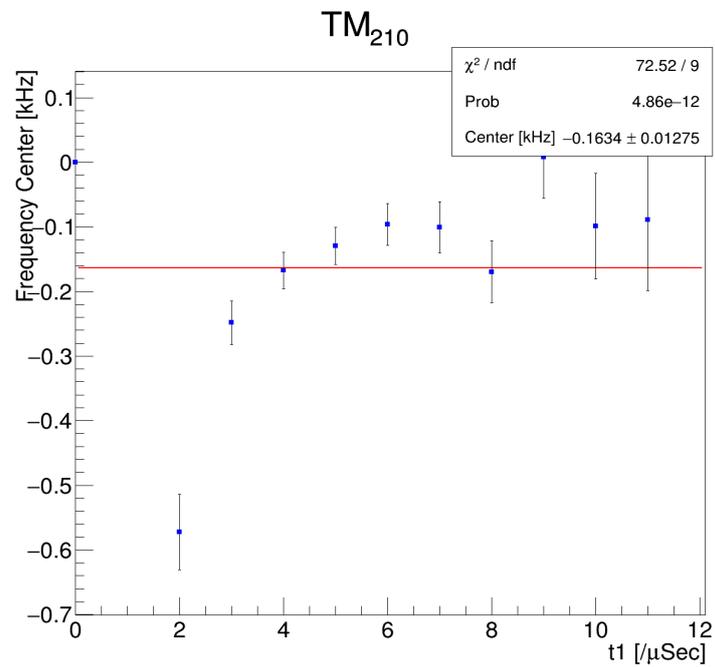


Fig.4.28 10 個の時間窓で Old Muonium 法 (TM<sub>210</sub> モード) を行ったときの結果。定数関数でフィッティングを行った。

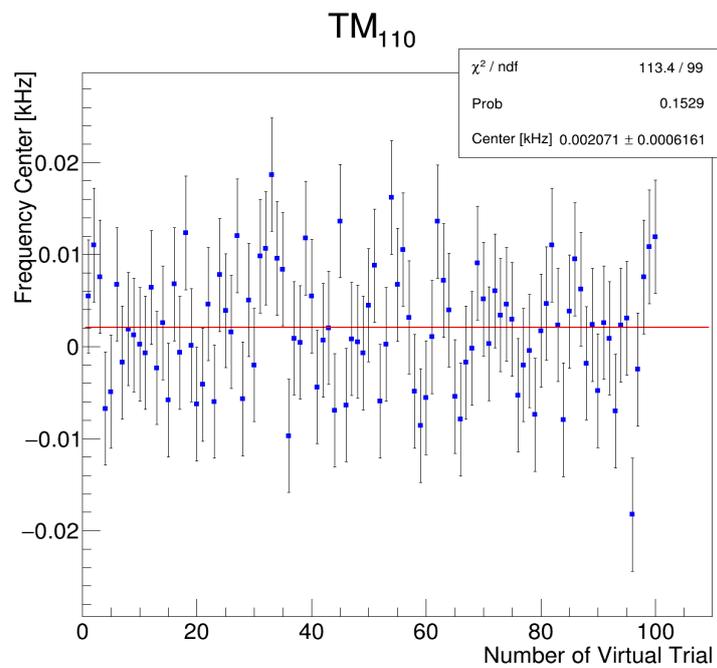


Fig.4.29 TM<sub>110</sub> モード実験を 100 回行ったときの仮想実験の結果。

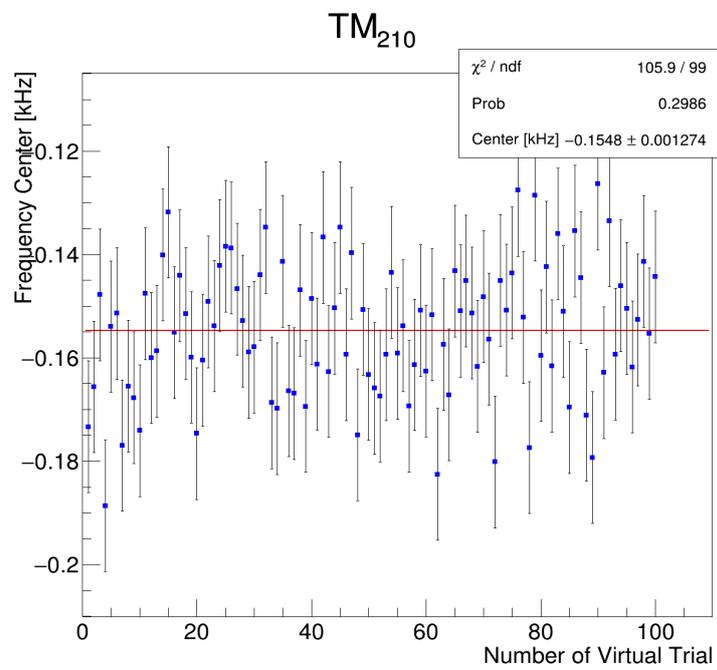


Fig.4.30  $TM_{210}$  モード実験を 100 回行ったときの仮想実験の結果。

## 第 5 章

# 曲線フィッティングエラー

Line Fitting に分類される不確かさは (4.1) を用いて導出することができる。本研究は、まず、両モード ( $TM_{110}$ ,  $TM_{210}$ ) について 100 回の共鳴シミュレーションを行い  $\Delta\nu$  を導出する。それからランファイルのパラメータに対して、適切な変動を加え再度シミュレーションを 100 回行い、 $\Delta\nu'$  を求める。

### 5.1 磁場不均一性

超伝導磁石は 1.7 T の静磁場をつくるが、完全な一様磁場ではなく不均一性をもっている。そのため、Breit-Rabi 図からもわかるように遷移周波数はわずかに変化する。ランファイルの第五列 (磁石磁場) に、0.006 ppm (Fig.4.5) の不均一性を加えた後に再度解析することで磁場の不均一性が原因の不確かさを導出できる。

#### 5.1.1 Conventional 法

Fig.5.1, Fig.5.2 は静磁場を仮定したときに、仮想実験を 100 回行った場合の結果を示している。(5.1) は  $TM_{110}$  モード, (5.2) は  $TM_{210}$  モードの結果であり、(5.3) は両者の和である。

$$\delta\Delta\nu_{12}^{\text{con}} = -1.4 \text{ Hz} \quad (5.1)$$

$$\delta\Delta\nu_{34}^{\text{con}} = +2.8 \text{ Hz} \quad (5.2)$$

$$\Delta\nu^{\text{con}} = 1.4 \text{ Hz} \quad (5.3)$$

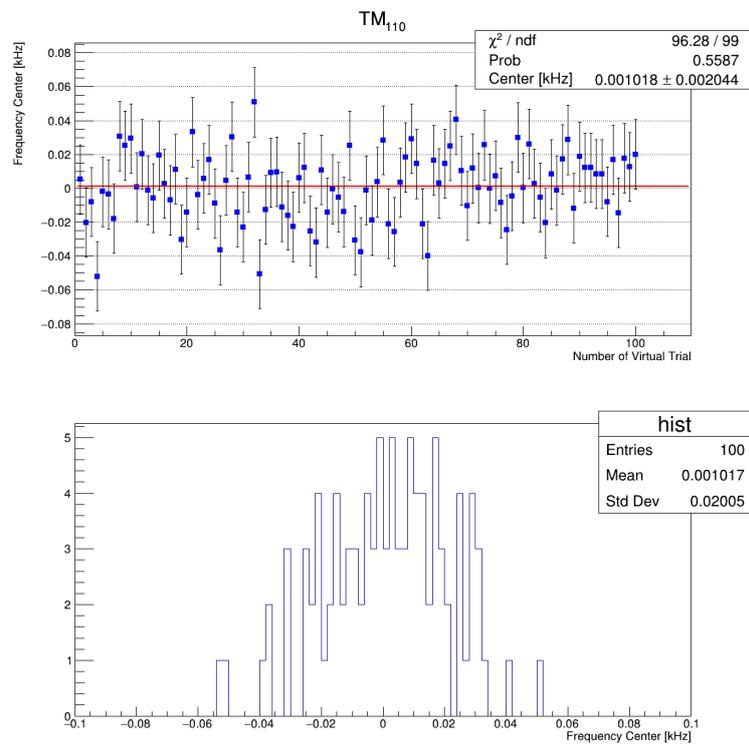


Fig.5.1 静磁場を仮定した場合に、 $TM_{110}$  モードで仮想実験を 100 回行った結果。

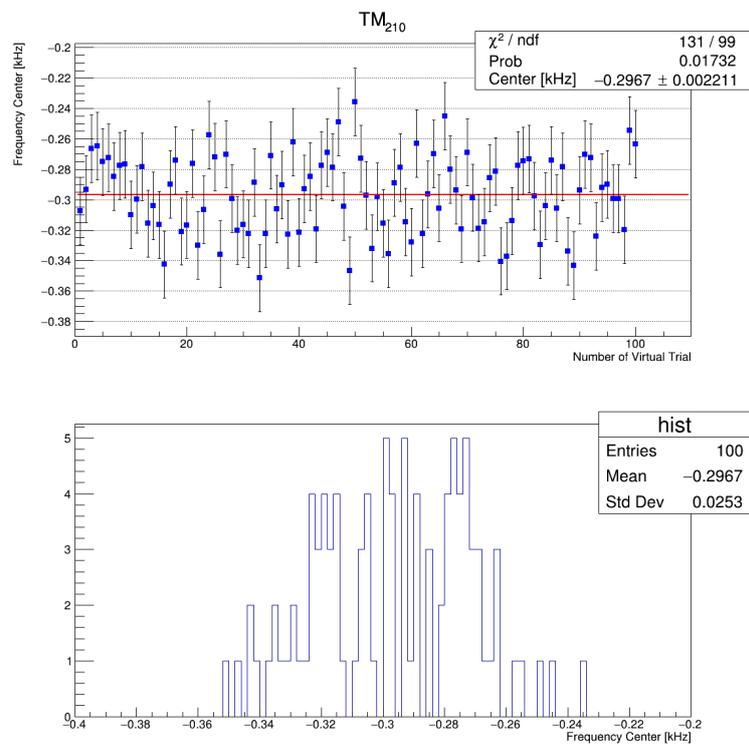


Fig.5.2 静磁場を仮定した場合に、 $TM_{210}$  モードで仮想実験を 100 回行った結果。

## 5.1.2 Old Muonium 法

Fig.5.3, Fig.5.4 は Old Muonium 法において静磁場を仮定したときに、仮想実験を 100 回行った場合の結果を示している。(5.4) は  $TM_{110}$  モード, (5.5) は  $TM_{210}$  モードの結果であり、

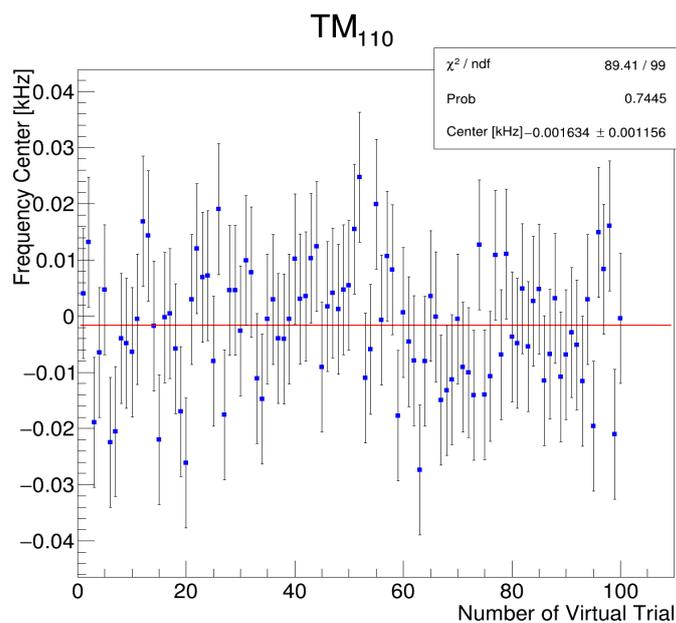


Fig.5.3 静磁場を仮定した場合に、 $TM_{110}$  モードで仮想実験を 100 回行った結果。

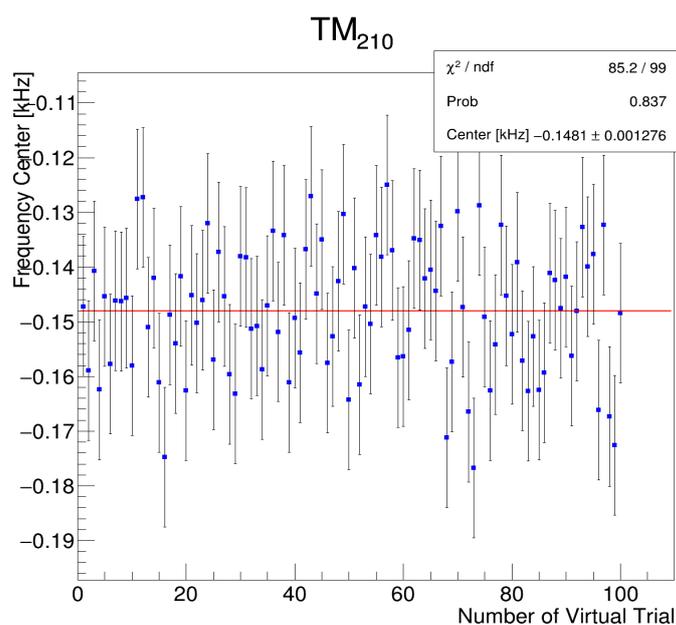


Fig.5.4 静磁場を仮定した場合に、 $TM_{210}$  モードで仮想実験を 100 回行った結果。

(5.6) は両者の和である。

$$\delta\Delta\nu_{12}^{\text{old}} = -3.7 \text{ Hz} \quad (5.4)$$

$$\delta\Delta\nu_{34}^{\text{old}} = +6.7 \text{ Hz} \quad (5.5)$$

$$\Delta\nu^{\text{old}} = 3.0 \text{ Hz} \quad (5.6)$$

## 5.2 ミュオン静止位置分布

磁場や立体角等のパラメータはミュオンの静止位置に依存する。ミュオンの静止位置が測定中に変動することがあれば、実効的には磁場と立体角が変動したことになる。Beam Profile Monitor(BPM)を使用したミュオンビーム D Line[29]のプロファイル結果は、実際のビームの中心点  $(x_{\text{center}}, y_{\text{center}})$  には 1 mm 以内の変動があったことを示している。ランファイルの第一列(位置ベクトル)に、1 mm の変動を加えた後に再解析することでミュオン静止位置による不確かさを導出できる。

### 5.2.1 Conventional 法

Fig.5.5, Fig.5.6 はミュオンの  $xy$  静止位置に 1 mm 以内の変動を加えてたときに、仮想実験を 100 回行った場合の結果を示している。(5.7) は  $\text{TM}_{110}$  モード, (5.8) は  $\text{TM}_{210}$  モードの結果であり、(5.9) は両者の和である。

$$\delta\Delta\nu_{12}^{\text{con}} = +0.2 \text{ Hz} \quad (5.7)$$

$$\delta\Delta\nu_{34}^{\text{con}} = +3.3 \text{ Hz} \quad (5.8)$$

$$\Delta\nu^{\text{con}} = 3.5 \text{ Hz} \quad (5.9)$$

### 5.2.2 Old Muonium 法

Fig.5.7, Fig.5.8 は Old Muonium 法においてミュオンの  $xy$  静止位置に 1 mm 以内の変動を加えてたときに、仮想実験を 100 回行った場合の結果を示している。(5.10) は  $\text{TM}_{110}$  モード, (5.11) は  $\text{TM}_{210}$  モードの結果であり、(5.12) は両者の和である。

$$\delta\Delta\nu_{12}^{\text{old}} = -2.9 \text{ Hz} \quad (5.10)$$

$$\delta\Delta\nu_{34}^{\text{old}} = +5.4 \text{ Hz} \quad (5.11)$$

$$\Delta\nu^{\text{old}} = 2.5 \text{ Hz} \quad (5.12)$$

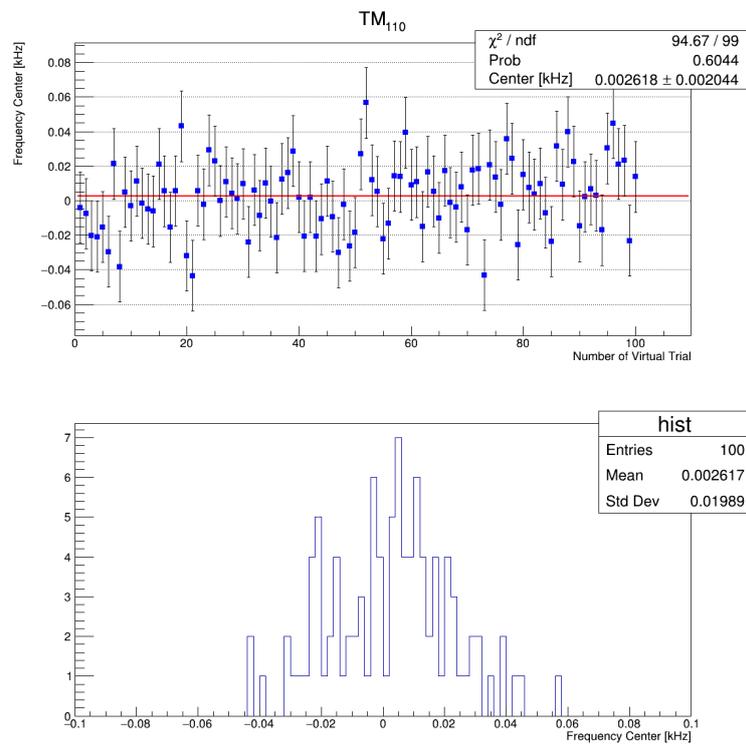


Fig.5.5 ミュオンの  $xy$  静止位置に変動を加え、 $TM_{110}$  モードで仮想実験を 100 回行った結果。

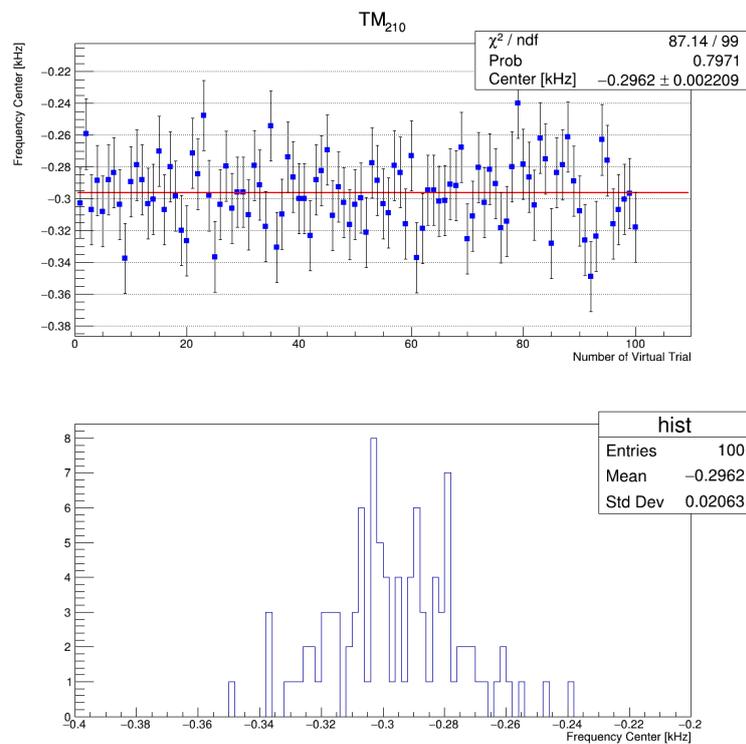


Fig.5.6 ミュオンの  $xy$  静止位置に変動を加え、 $TM_{210}$  モードで仮想実験を 100 回行った結果。

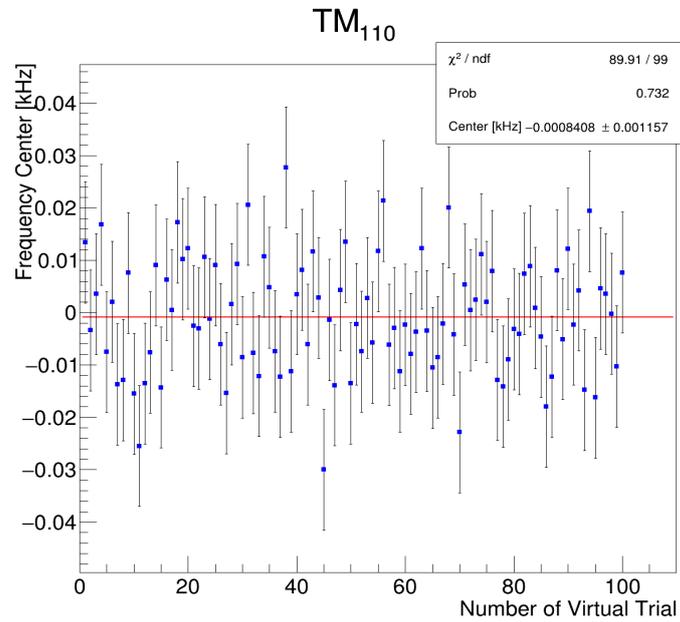


Fig.5.7 ミュオンの  $xy$  静止位置に変動を加え、TM<sub>110</sub> モードで仮想実験を 100 回行った結果。

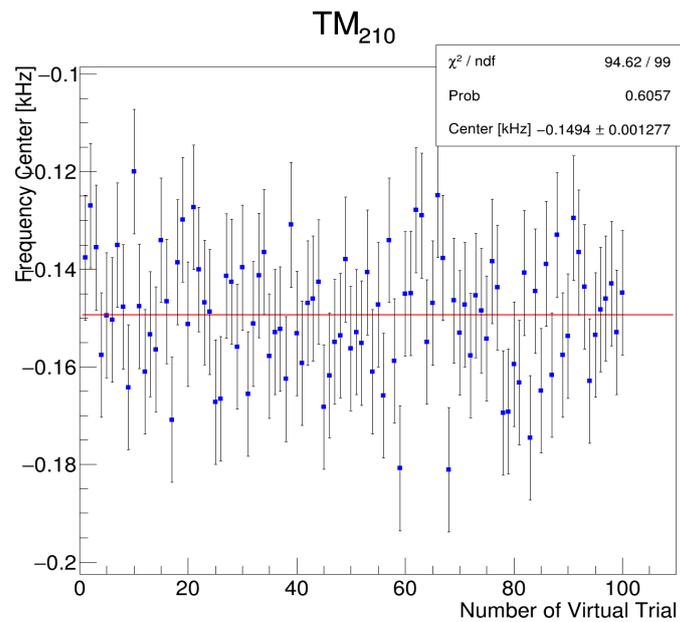


Fig.5.8 ミュオンの  $xy$  静止位置に変動を加え、TM<sub>210</sub> モードで仮想実験を 100 回行った結果。

## 5.3 マイクロ波パワー

共鳴曲線 (2.64), (2.67) はマイクロ波パワーに依存する。マイクロ波パワーが、測定中に信号発生器の出力変動や同軸ケーブル内での減衰によって変動すれば、遷移周波数のシフトが生じる。フィードバックシステムを用いたパワー補正ではパワーを 0.02 % 以内に安定化させることができる [28]。また、(4.16) より  $H$  は  $|H|^2 \propto P$  を満たすので、マイクロ波磁場の変動は  $\sqrt{0.02} = 0.141\%$  である。本研究では、ランファイルの第五列 (キャビティ磁場) に 0.141% の変動を加えた後に再解析を行う。

### 5.3.1 Conventional 法

Fig.5.9, Fig.5.10 はマイクロ波パワーに 0.02 % の変動を加えてたときに、仮想実験を 100 回行った場合の結果を示している。(5.13) は  $TM_{110}$  モード, (5.14) は  $TM_{210}$  モードの結果であり、(5.15) は両者の和である。

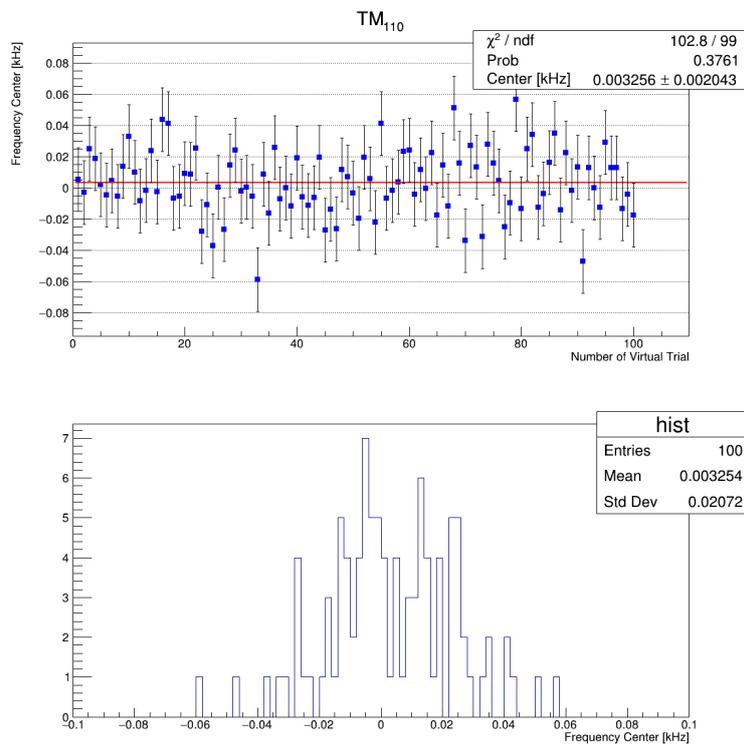


Fig.5.9 マイクロ波パワーに 0.02 % の変動を加え、 $TM_{110}$  モードで仮想実験を 100 回行った結果。

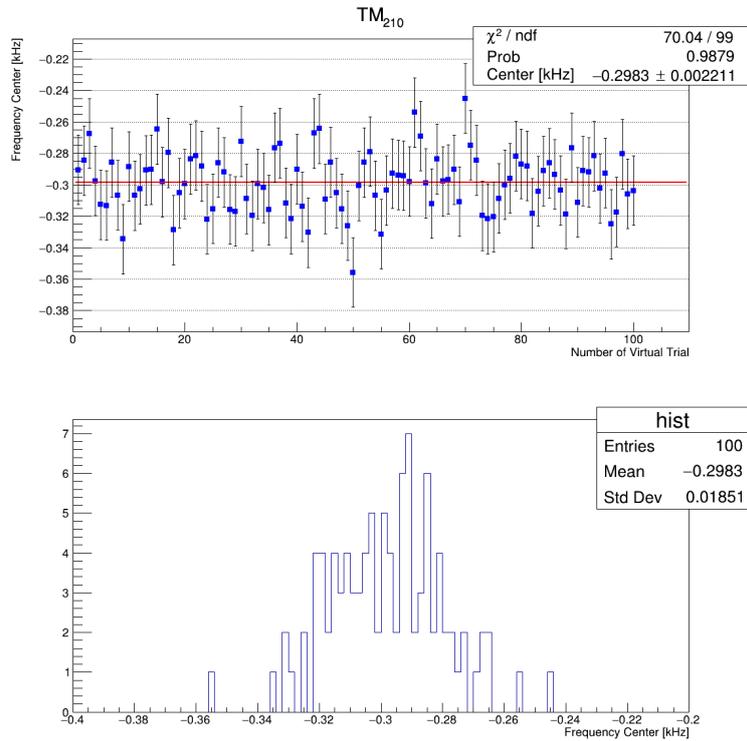


Fig.5.10 マイクロ波パワーに0.02%の変動を加え、 $TM_{210}$ モードで仮想実験を100回行った結果。

$$\delta\Delta\nu_{12}^{\text{con}} = +0.8 \text{ Hz} \quad (5.13)$$

$$\delta\Delta\nu_{34}^{\text{con}} = +1.2 \text{ Hz} \quad (5.14)$$

$$\Delta\nu^{\text{con}} = 2.0 \text{ Hz} \quad (5.15)$$

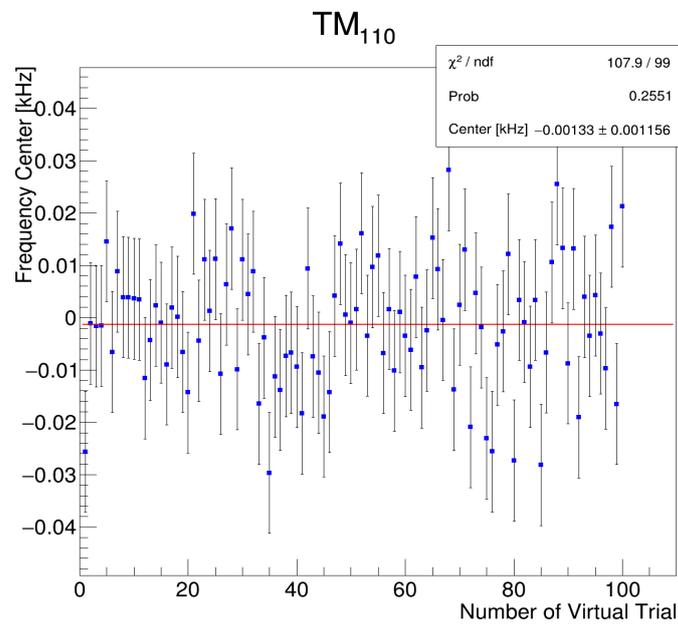
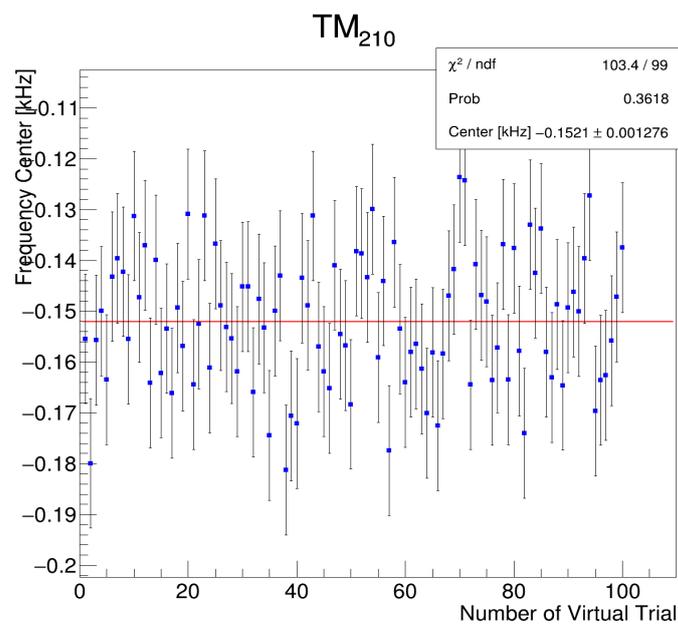
### 5.3.2 Old Muonium 法

Fig.5.11, Fig.5.12 は Old Muonium 法においてマイクロ波パワーに0.02%の変動を加えてたときに、仮想実験を100回行った場合の結果を示している。(5.16)は $TM_{110}$ モード、(5.17)は $TM_{210}$ モードの結果であり、(5.18)は両者の和の絶対値である。

$$\delta\Delta\nu_{12}^{\text{old}} = -3.4 \text{ Hz} \quad (5.16)$$

$$\delta\Delta\nu_{34}^{\text{old}} = +2.7 \text{ Hz} \quad (5.17)$$

$$\Delta\nu^{\text{old}} = 0.7 \text{ Hz} \quad (5.18)$$

Fig.5.11 マイクロ波パワー変動を加え、TM<sub>110</sub> モードで仮想実験を 100 回行った結果。Fig.5.12 マイクロ波パワーに変動を加え、TM<sub>210</sub> モードで仮想実験を 100 回行った結果。

## 5.4 磁気プローブの絶対精度

磁石磁場はラーモア歳差運動を利用した NMR 磁気プローブによって測定される。磁気プローブは陽子のラーモア振動数を通して磁場を計測する。NMR サンプルである純水中の陽子が感じる磁場  $B_p$  と実際の磁場  $B$  は異なるため、補正因子  $\delta_t$  を用いて

$$B_p = (1 - \delta_t)B = (1 - \sigma(\text{H}_2\text{O}, T_r, T) - \delta_b(\text{H}_2\text{O}, T) - \delta_p - \delta_s)B \quad (5.19)$$

とかける。ここで、 $\delta_t$  は以下の四つの効果に分けられる。

$$\sigma(\text{H}_2\text{O}, T_r, T) = -10.36 \text{ ppb} \times (T_r - T) \simeq -90 \text{ ppb} \quad (5.20)$$

$$\delta_b(\text{H}_2\text{O}, T) = (\epsilon - \frac{1}{3})\chi(\text{H}_2\text{O}, T) \simeq -1505.8 \text{ ppb} \quad (5.21)$$

$$\delta_s \simeq 15.2 \text{ ppb} \quad (5.22)$$

$$\delta_p \simeq 0 \quad (5.23)$$

$\sigma(\text{H}_2\text{O}, T_r)$  は純水サンプルの反磁性効果、 $\delta_b(\text{H}_2\text{O}, T_r)$  はプローブの形状効果、 $\delta_s$  はプローブの磁化率が与える影響、 $\delta_p$  は水サンプルに含まれる不純物が与える影響をそれぞれ表している。 $T_r$  は測定の基準温度 (34.7 °C)、 $T$  はプローブ温度 (~ 26 °C) である [37]。 $\epsilon$  はプローブの形状に関するパラメータであり、プローブが無限に長い円柱とみなせる場合には  $\epsilon = 1/2$  となる。Fermilab ミュオン ( $g-2$ ) 実験が開発した磁気プローブの補正因子  $\delta_t$  は

$$\delta_t \simeq -1583 \text{ ppb} \quad (5.24)$$

である [37]。(5.24) を用いて (5.19) を計算すると

$$|\delta_t B| \equiv \Delta B = 0.027 \text{ Gauss} \quad (5.25)$$

となる。

磁場下では超微細構造はゼーマン分裂した二準位の振動数  $\nu_{12}, \nu_{34}$  の和である。

$$\nu_{12} = -\frac{\mu_B^\mu g'_\mu B}{h} + \frac{\Delta\nu}{2} [(1+x) - \sqrt{1+x^2}] \quad (5.26)$$

$$\nu_{34} = \frac{\mu_B^\mu g'_\mu B}{h} + \frac{\Delta\nu}{2} [(1-x) + \sqrt{1+x^2}] \quad (5.27)$$

(5.26), (5.27) より磁気プローブの精度が超微細構造に与える不確かさは

$$\Delta\nu = \left[ \sqrt{\left(\frac{\partial\nu_{12}}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\Delta x}{\Delta B}\right)^2 + \left(\frac{\partial\nu_{12}}{\partial B}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\partial\nu_{34}}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\Delta x}{\Delta B}\right)^2 + \left(\frac{\partial\nu_{34}}{\partial B}\right)^2} \right] \Delta B \quad (5.28)$$

である。ただし、 $\Delta x$  は次式を満たす。

$$\frac{\Delta x}{\Delta B} = \frac{(-g'_\mu \mu_B^\mu + g_J \mu_B^e)}{h\Delta\nu} \quad (5.29)$$

(5.25) 及び (5.29) を用いて (5.28) を計算すればプローブ精度が寄与する不確かさは

$$\Delta\nu = 0 \text{ Hz} \quad (5.30)$$

となる。

## 5.5 Bloch-Siegert 項

固有状態 (2.48), (2.49) を導出する際に回転波近似を用いた。回転波近似が遷移周波数に与える影響は

$$\frac{\delta\nu_{ij}}{\nu_{ij}} = \left| \frac{b_{ij}}{\omega_{ij}} \right|^2 \quad (5.31)$$

$$\therefore \delta\nu_{ij} = \frac{b_{ij}^2}{4\pi^2\nu_{ij}} \quad (5.32)$$

である [38]。 (4.20), (4.12), (3.1), (3.2) を用いて上式を計算すると

$$\delta\Delta\nu_{12} = +0.69 \text{ Hz} \quad (5.33)$$

$$\delta\Delta\nu_{34} = +0.52 \text{ Hz} \quad (5.34)$$

$$\Delta\nu = 1.2 \text{ Hz} \quad (5.35)$$

が得られる。(5.33) は  $\text{TM}_{110}$  モード, (5.34) は  $\text{TM}_{210}$  モードの結果であり、(5.35) は両者の和である。

## 5.6 非共鳴状態

固有状態 (2.48), (2.49) を導出する際に、非共鳴状態間の遷移を無視した。非共鳴状態が遷移周波数に与える影響は

$$\delta\Delta\nu_{12} = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{b_{31}^2}{\nu_{31} - \nu_{12}} - \frac{b_{23}^2}{\nu_{23} - \nu_{12}} + \frac{b_{41}^2}{\nu_{41} - \nu_{12}} - \frac{b_{24}^2}{\nu_{24} - \nu_{12}} \right) \quad (5.36)$$

$$\delta\Delta\nu_{34} = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{b_{31}^2}{\nu_{31} - \nu_{34}} - \frac{b_{23}^2}{\nu_{23} - \nu_{34}} + \frac{b_{41}^2}{\nu_{41} - \nu_{34}} - \frac{b_{24}^2}{\nu_{24} - \nu_{34}} \right) \quad (5.37)$$

である [39], [40]。(2.5)~(2.8) 及び第二章の磁気双極子行列を用いると次式が得られる。

$$\nu_{23} - \nu_{12} = 43.6 \text{ GHz} \quad (5.38)$$

$$\nu_{41} - \nu_{12} = 48.1 \text{ GHz} \quad (5.39)$$

$$\nu_{23} - \nu_{34} = 42.9 \text{ GHz} \quad (5.40)$$

$$\nu_{41} - \nu_{34} = 47.4 \text{ GHz} \quad (5.41)$$

$$|b_{23}| = 4441 \text{ kHz} \quad (5.42)$$

$$|b_{41}| = 5475 \text{ kHz} \quad (5.43)$$

(5.38)~(5.43) を (5.36) 及び (5.37) に代入すると

$$\delta\Delta\nu_{12} = +4.3 \text{ Hz} \quad (5.44)$$

$$\delta\Delta\nu_{34} = +4.4 \text{ Hz} \quad (5.45)$$

$$\Delta\nu = 8.7 \text{ Hz} \quad (5.46)$$

が得られる。(5.44) は  $\text{TM}_{110}$  モード, (5.45) は  $\text{TM}_{210}$  モードの結果をそれぞれ表しており、(5.46) は両者の和である。

## 第6章

# 圧力外挿エラー

気体密度  $D$  と超微細構造  $\Delta\nu$  の間には

$$\Delta\nu(D) = \Delta\nu(0)(1 + aD + bD^2) \quad (6.1)$$

が成り立つ (衝突広がり: Collisional Broadening)。係数  $a, b$  は

$$a = -8.2(0.5) \times 10^{-6} \text{ atm}^{-1} \quad (6.2)$$

$$b = -6.6(0.9) \times 10^{-9} \text{ atm}^{-2} \quad (6.3)$$

である [22]。  $D$  の一次の項はミュオニウムとクリプトンの二体衝突 [16] を、  $D$  の二次の項 [26] は三体衝突を表している。衝突広がり を考慮して、  $D = 0$  の超微細構造  $\Delta\nu(0)$  を外挿により求めなければならない。圧力外挿エラーは圧力の外挿時に発生する不確かさをさす。本研究は、1 atm, 0.5 atm, 0.3 atm の三点から外挿を試みる。なお、圧力外挿エラーに分類される不確かさは (4.2) を用いて導出することができる (Fig.6.1)。

### 6.1 密度のキャリブレーション

気体温度が密度に与える影響を考慮して、圧力を 0 K における圧力値にキャリブレーションする。以下にその手続きを示した。

ミュオンは静止しているとみなせるので、クリプトンの状態方程式は係数  $a_v$  及び  $b_v$  を用いて

$$\left(P + \frac{a_v}{V^2}\right)(V - b_v) = RT \quad (6.4)$$

と表せる。ただし、係数  $a_v, b_v$  は

$$a_v = 0.2325 \text{ Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2} \quad (6.5)$$

$$b_v = 3.96 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \quad (6.6)$$

である [25]。  $P = 1 \text{ atm}$ ,  $T = 293.15 \text{ K}$  の場合、(6.4) を用いてモル体積  $V$  は

$$V = 0.0234 \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \quad (6.7)$$

となる。(6.7) 及び  $T = 273.15 \text{ K}$  を (6.4) に代入すればキャリブレーション圧力  $P^{\text{cal}}$  が求められる。

$$P_1^{\text{cal}} = 0.93 \text{ atm} \quad (6.8)$$

同様にして  $0.5 \text{ atm}$ ,  $0.3 \text{ atm}$  におけるキャリブレーション圧力を求めることができる。

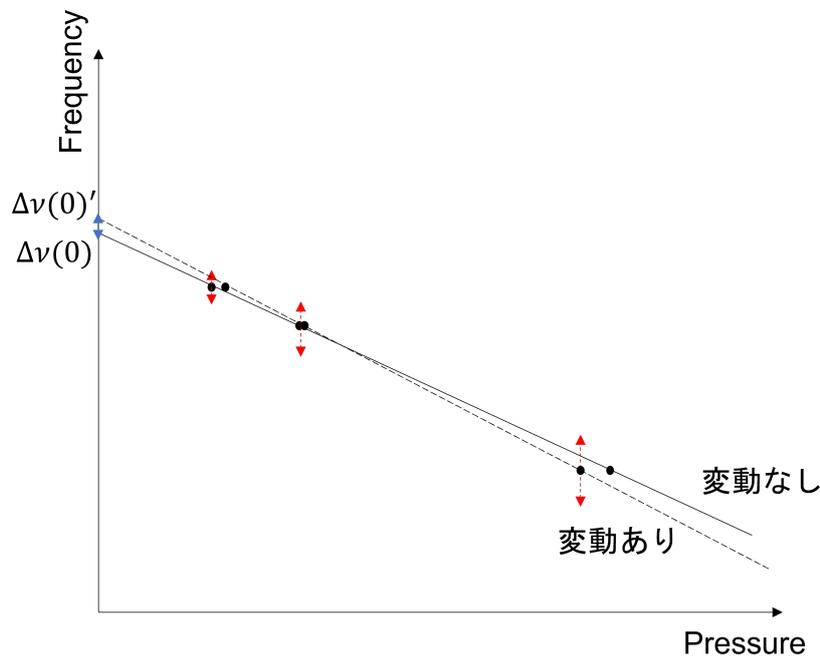


Fig.6.1 もとの外挿直線の切片  $\Delta v(0)$  及び適切な変動を加えた後に再度外挿した直線の切片  $\Delta v(0)'$  の差 (式 4.2) を求めることにより、圧力外挿エラーが得られる。

## 6.2 クリプトンの温度変動

温度変動が密度に与える影響は (6.4) を用いて

$$\Delta P = \frac{R}{V - b_v} \Delta T \quad (6.9)$$

と表せる。また、密度変動が超微細構造に与える影響は (6.1) を用いて

$$\delta \Delta v(P) = \Delta v(0)(a + 2bP)\Delta P \quad (6.10)$$

と表せる。 $-0.2^\circ\text{C} \leq \Delta T \leq +0.2^\circ\text{C}$  の変動にしたがって、(6.9), (6.10) でそれぞれ  $\Delta P$ ,  $\delta \Delta v(P)$  を決め、それらを外挿点に加えた後に再度ゼロ外挿を行った。上記の外挿操作を仮想的に

100 回行った際の結果を Fig.6.2(TM<sub>110</sub> モード), Fig.6.3(TM<sub>210</sub> モード) に示した。Fig.6.2 及び Fig.6.3 の横軸の平均値がそれぞれ (6.11), (6.12) であり、(6.13) は両者の和である。

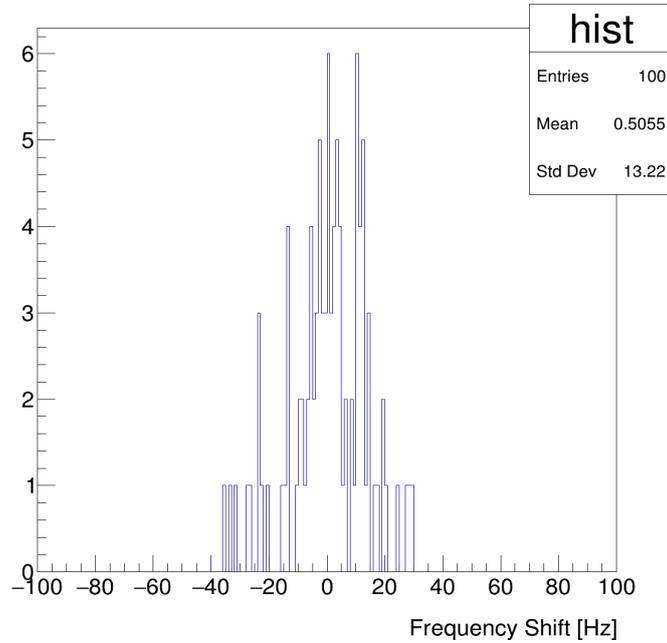


Fig.6.2 TM<sub>110</sub> において 0.2 °C 以内の温度変動を加え後にゼロ外挿をし、同操作を 100 回行った。

$$\delta\Delta\nu'_{12}(0) = +0.5 \text{ Hz} \quad (6.11)$$

$$\delta\Delta\nu'_{34}(0) = -5.3 \text{ Hz} \quad (6.12)$$

$$\delta\Delta\nu'(0) = -4.8 \text{ Hz} \quad (6.13)$$

### 6.3 クリプトンの圧力変動

標的気体の圧力は共鳴実験中に常にモニタリングされている、これによりクリプトン気体の圧力の変動を定量的に評価することができる。2017 年のゼロ磁場実験では  $\pm 68 \text{ Pa}$  の圧力変動が計測を通して得られている [22]。

$$\Delta P = 68 \text{ Pa} = 6.71 \times 10^{-4} \text{ atm} \quad (6.14)$$

(6.14) の変動を (6.10) に代入して  $\delta\Delta\nu(P)$  を求め、それを外挿点に加えた後に再度ゼロ外挿を行った。上記の外挿操作を仮想的に 100 回行った際の結果を Fig.6.4(TM<sub>110</sub> モード), Fig.6.5(TM<sub>210</sub> モード) に示した。Fig.6.4, Fig.6.5 の横軸の平均値がそれぞれ (6.15), (6.16) で

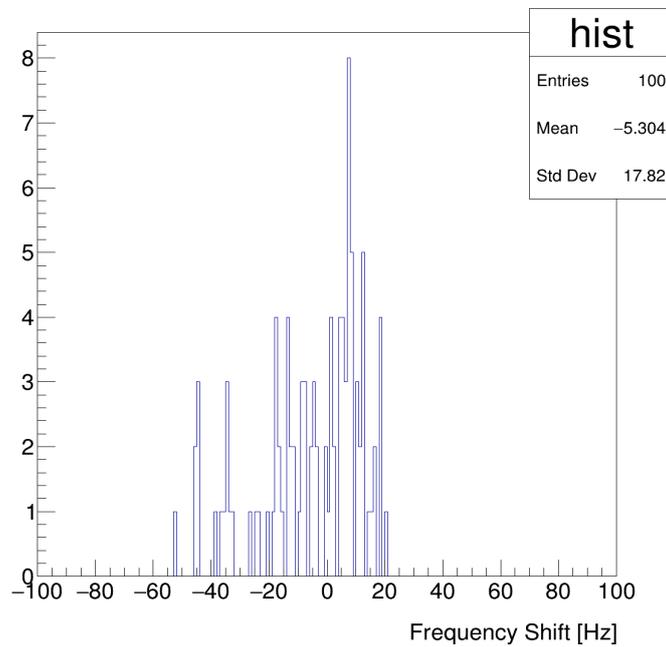


Fig.6.3  $TM_{210}$  において  $0.2\text{ }^{\circ}\text{C}$  以内の温度変動を加え後にゼロ外挿をし、同操作を 100 回行った。

あり、(6.17) は両者の和である。

$$\Delta\nu'_{12}(0) = +0.79\text{ Hz} \quad (6.15)$$

$$\Delta\nu'_{34}(0) = +1.98\text{ Hz} \quad (6.16)$$

$$\Delta\nu'(0) = +2.77\text{ Hz} \quad (6.17)$$

## 6.4 圧力計の精度

2017 年のゼロ磁場実験では、圧力計として読み取り精度が設定レンジの 0.2 % のキャパシタンスゲージ (M-342DG-13) を使用した。この場合、フルスケール 1 atm で測定した場合は  $\delta P = 0.002\text{ atm}$  となる。高磁場実験では、水晶に加えられた振動を圧力値に変換する高精度圧力計測器 RPM4 (by Fluke Calibration) \*1 を使用する予定である。その場合、読み取り精度は 0.003 % であり、フルスケールが  $P\text{ atm}$  の場合は

$$\Delta P = 3P \times 10^{-5}\text{ atm} \quad (6.18)$$

\*1 圧力計 RPM4 は、内蔵する水晶振動式圧力変換器 (Quartz Reference Pressure Transducer:Q-RPT) を用いて圧力を計測することができる。Q-RPT は応力で振動する水晶振動子の振動周波数を電気信号に変換する変換器である [30]。

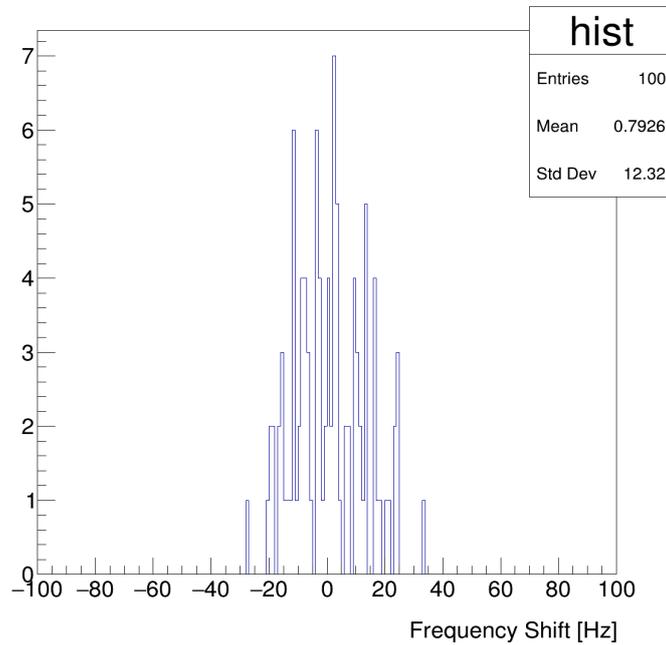


Fig.6.4 TM<sub>110</sub> において 68 Pa 以内の圧力変動を加えた後にゼロ外挿をし、同操作を 100 回行った。

となる。(6.18) を (6.10) に代入して  $\delta\Delta\nu(P)$  を求め、それを外挿点に加えた後に再度ゼロ外挿を行った。上記の外挿操作を仮想的に 100 回行った際の結果を Fig.6.8(TM<sub>110</sub> モード), Fig.6.9(TM<sub>210</sub> モード) に示した。Fig.6.8, Fig.6.9 の横軸の平均値がそれぞれ (6.19), (6.20) であり、(6.21) は両者の和である。

$$\Delta\nu'_{12}(0) = +0.80 \text{ Hz} \quad (6.19)$$

$$\Delta\nu'_{34}(0) = +0.38 \text{ Hz} \quad (6.20)$$

$$\Delta\nu'(0) = +1.2 \text{ Hz} \quad (6.21)$$

## 6.5 二次の圧カシフト

係数  $b$  の不確かさが超微細構造に与える影響は (6.1) を用いて

$$\delta\Delta\nu(P) = \Delta\nu(0)P^2\Delta b \quad (6.22)$$

と表せる。(6.22) を外挿点に加えた後に再度ゼロ外挿を行う。上記の外挿操作を仮想的に 100 回行った際の結果を Fig.6.10(TM<sub>110</sub> モード), Fig.6.11(TM<sub>210</sub> モード) に示した。Fig.6.10, Fig.6.11 の横軸の平均値がそれぞれ (6.23), (6.24) であり、(6.25) は両者の和である。

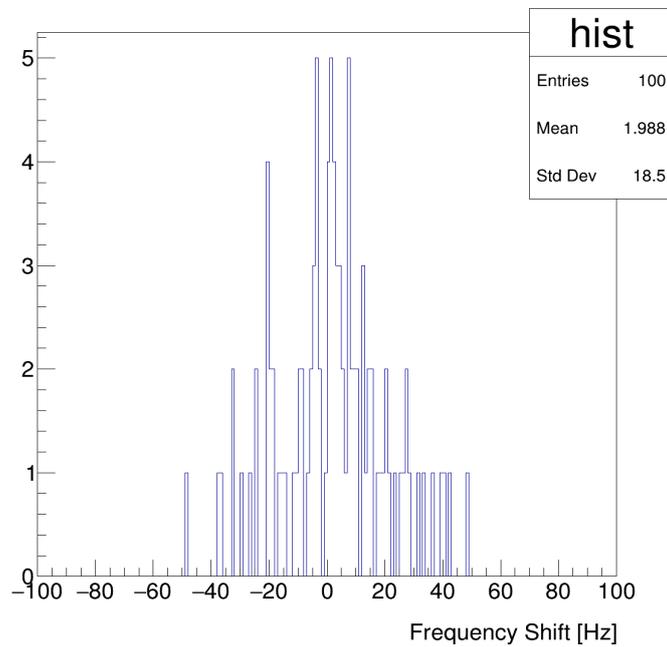


Fig.6.5 TM<sub>210</sub> において 68 Pa 以内の圧力変動を加えた後にゼロ外挿をし、同操作を 100 回行った。

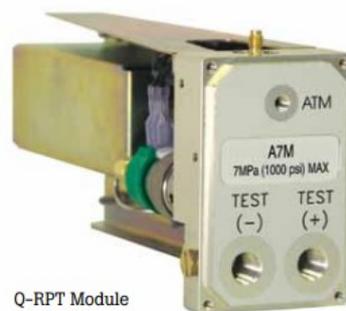


Fig.6.6 水晶振動式圧力変換器 (Q-RPT)

$$\Delta\nu'_{12}(0) = 0 \text{ Hz} \quad (6.23)$$

$$\Delta\nu'_{34}(0) = -0.0004 \text{ Hz} \quad (6.24)$$

$$\Delta\nu'(0) = -0.0004 \text{ Hz} \quad (6.25)$$

## 6.6 不純物

ミュオニウムはクリプトン標的に含まれる水素との衝突において、水素の電子スピンとミュオンスピンとの間に働く交換相互作用によりミュオニウムの波動関数に変化する。結果としてミュオンスピンの減偏極を生じる。単位圧力あたりのミュオニウムの超微細構造シフトは  $W$ 。



Fig.6.7 圧力計 RPM4。背面 (左図), 前面 (右図)。

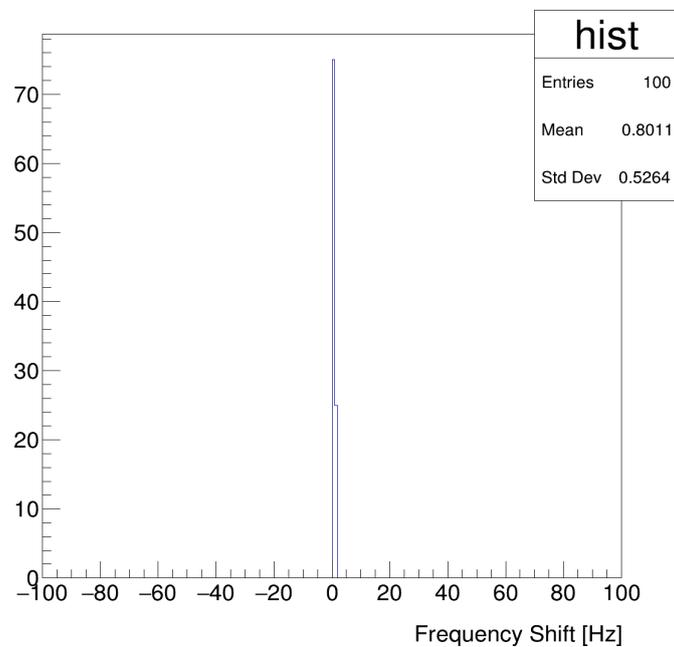


Fig.6.8  $TM_{110}$  において読み取り精度 0.003 % の変動を圧力値に加えた後にゼロ外挿をし、同操作を 100 回行った。

Liu より

$$\frac{\partial \nu_{\text{Mu}}}{\partial P} = 16 \text{ kHz/atm} \quad (6.26)$$

と表される [1]。一方、2017 年の MuSEUM ゼロ磁場実験において、QMASS で測定したクリプトン標的の水素含有量は 1 ppm であった。(6.15) によりこれは 0.016 Hz の周波数シフトに相当する [22]。

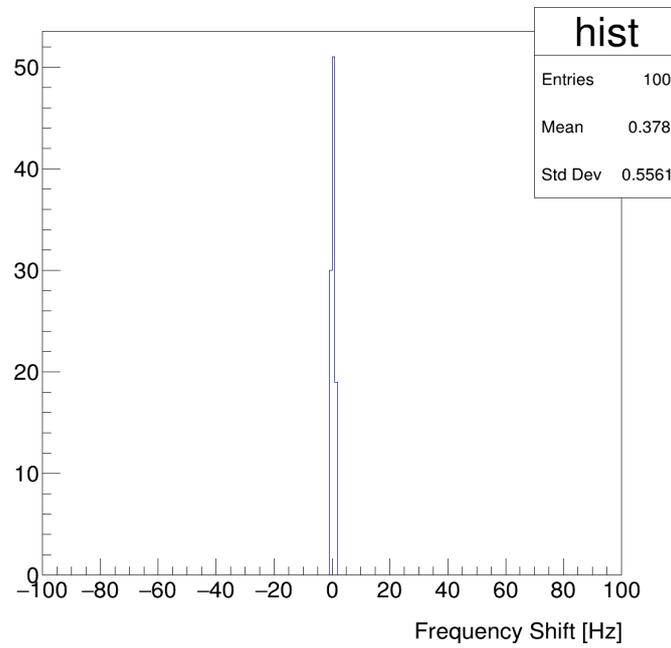


Fig.6.9  $TM_{210}$  において読み取り精度 0.003 % の変動を圧力値に加えた後にゼロ外挿をし、同操作を 100 回行った。

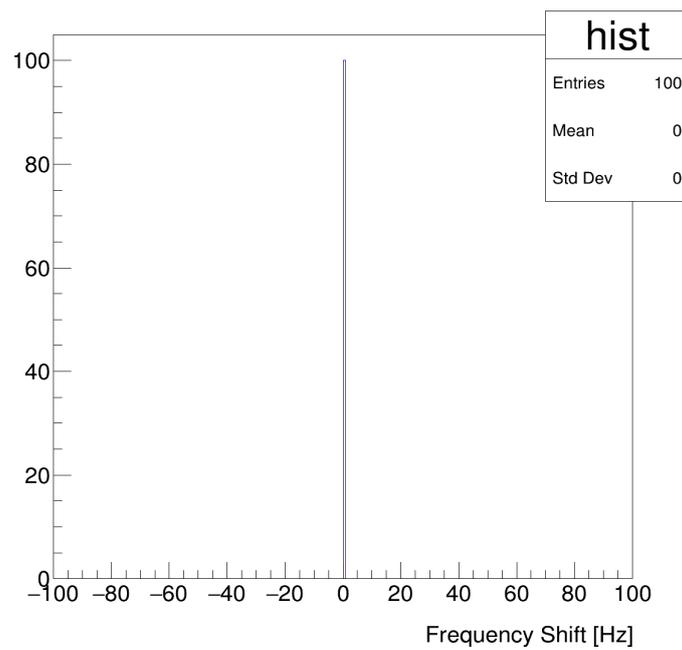


Fig.6.10  $TM_{110}$  において  $\delta b = 1.7$  の変動を加えた後にゼロ外挿をし、同操作を 100 回行った

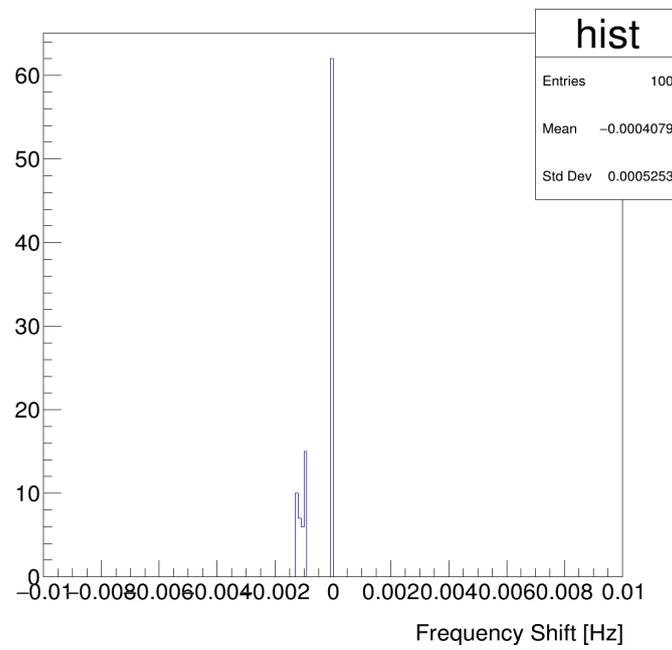


Fig.6.11  $TM_{210}$  において  $\delta b = 1.7$  の変動を加えた後にゼロ外挿をし、同操作を 100 回行った



## 第 7 章

# 結論と展望

### 7.1 結論

本研究は高磁場におけるミュオニウム基底状態超微細構造測定のためのモンテカルロシミュレーション<sup>\*1</sup>を確立し、1.7 T で実験を行った際に予想される MuHFS の不確かさを導出した。

#### 7.1.1 マイクロ波パワーの最適値

第四章の FOM のシミュレーション結果により、MuSEUM 実験のマイクロ波パワー (ラビ周波数) の最適値として (7.1), (7.2) が得られた。

$$b^{\text{con}} \sim 150 \text{ kHz} \quad (7.1)$$

$$b^{\text{old}} \sim 250 \text{ kHz} \quad (7.2)$$

そのための共振器に必要な印加パワーは

$$P_{12}^{\text{con}} \sim 9 \text{ W} \quad (7.3)$$

$$P_{34}^{\text{con}} \sim 50 \text{ W} \quad (7.4)$$

$$P_{12}^{\text{old}} \sim 20 \text{ W} \quad (7.5)$$

$$P_{34}^{\text{old}} \sim 120 \text{ W} \quad (7.6)$$

MuSEUM 実験は、4 個の並列した信号増幅器で信号パワーを増幅させた後にマイクロ波共振器に導入するので、(7.3)~(7.6) のマイクロ波パワーは実現可能である。

---

<sup>\*1</sup> 本研究のために開発したプログラム及び使用データを、以下のウェブサイトに掲載した。

<https://github.com/HideharuYamauchi>

### 7.1.2 高磁場実験の不確かさ

Table7.1 に本研究が導出した不確かさ及び先行実験の不確かさを列挙した。統計的不確かさは、112 days のデータテイキングかつ 400,000 muons/pulse として導出した。また、1 pulse のミュオンを全て TM110 モード, あるいは TM210 モードのシミュレーションに使用した。<sup>\*2</sup>MLF H Line は、4,000,000 muons/pulse を供給可能なので、実際の統計的不確かさはさらに約 2.24 倍改善できる見込みである。

Table7.1 MuSEUM 高磁場測定の不確かさ。

	$\delta\Delta\nu^{\text{MuSEUM}}$ Hz		$\delta\Delta\nu^{\text{LAMPF}}$ Hz
	Conventional	Old Muonium	Old Muonium
統計的不確かさ	3.0	1.7	60
磁場不均一性	1.4	3.0	0
ミュオン静止位置分布	3.5	2.5	5
マイクロ波パワー	2.0	0.7	9
磁気プローブの精度	0		0
Bloch-Siegert 項	1.2		2.8
非共鳴状態	8.7		
クリプトンの圧力変動	2.8		2
クリプトンの温度変動	4.8		11
圧力計の精度	1.2		11
二次の圧力シフト	0		8.5
不純物	0.016		10
<b>Total</b>	<b>11.7</b>	<b>11.3</b>	<b>64.3</b>

Table7.1 をみると、統計的不確かさに関しては、Old Muonium 法のほうが約二倍の精度が得られており、FOM のシミュレーション結果と一致する。一方、系統的な不確かさに関しては、実験手法の違いを問わず同程度の精度が得られている。今後は、さらに検討、解析を進め、系統的な不確かさの各項目の見積もりだけでなく、実験手法の違いが系統的な不確かさの各項目に対してどのように影響しているのかを見極め、系統的な不確かさをより抑制できる実験手法を究明する必要があると考えている。

<sup>\*2</sup> 本来であれば、式 (2.36)~(2.39) によりトータルのミュオンのうち、一つのモードに使用できるミュオン数は全体の約半分 (~200,000) である。

## 7.2 展望・課題

### 7.2.1 $\mu_\mu/\mu_p$ の不確かさ

MuSEUM 実験はミュオニウム超微細構造の他に、ミュオン-陽子磁気モーメント  $\mu_\mu/\mu_p$

$$\frac{\mu_\mu}{\mu_p} = \frac{4\nu_{12}\nu_{34} + \nu_p \frac{\mu_e}{\mu_p} (\nu_{34} - \nu_{12})}{\nu_p \left( \nu_p \frac{\mu_e}{\mu_p} - (\nu_{34} - \nu_{12}) \right)} \quad (7.7)$$

を同時に決定することが可能である。本研究が導出した  $\Delta\nu_{12}, \Delta\nu_{34}$  を (7.8) をに代入することにより  $\mu_\mu/\mu_p$  の不確かさを導出することができる。

$$\Delta \frac{\mu_\mu}{\mu_p} = \sqrt{\left( \frac{\partial \frac{\mu_\mu}{\mu_p}}{\partial \nu_{12}} \right)^2 \Delta \nu_{12}^2 + \left( \frac{\partial \frac{\mu_\mu}{\mu_p}}{\partial \nu_{34}} \right)^2 \Delta \nu_{34}^2} \quad (7.8)$$

### 7.2.2 非共鳴状態の寄与

本研究が評価した不確かさの中で、非共鳴状態の寄与が最も大きい不確かさとなった。その大きさは

$$\delta \Delta \nu^{\text{non-reso}} = 8.7 \text{ Hz} \quad (7.9)$$

である。一方、先行研究 [1] の結果は

$$\delta \Delta \nu^{\text{non-reso}} = 2.8 \text{ Hz} \quad (7.10)$$

であり、本研究のほうが三倍以上精度が悪い結果が得られている。このことは不確かさの評価式が異なることに起因すると考えられる。先行研究が用いた表式は

$$\delta \Delta \nu_{12} = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{b_{31}^2}{\nu_{31} - \nu_{12}} + \frac{b_{23}^2}{\nu_{23} - \nu_{12}} + \frac{b_{41}^2}{\nu_{41} - \nu_{12}} + \frac{b_{24}^2}{\nu_{24} - \nu_{12}} \right) \quad (7.11)$$

$$\delta \Delta \nu_{34} = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{b_{31}^2}{\nu_{31} - \nu_{34}} + \frac{b_{23}^2}{\nu_{23} - \nu_{34}} + \frac{b_{41}^2}{\nu_{41} - \nu_{34}} + \frac{b_{24}^2}{\nu_{24} - \nu_{34}} \right) \quad (7.12)$$

であり、本研究が用いた評価式は (5.36), (5.37) である。また、MuSEUM ゼロ磁場実験の見積もりに用いられた評価式は

$$\delta \Delta \nu_{14} = \frac{b_{14}}{2\pi} \left[ \frac{1}{\nu_{12} - \nu_{14}} - \frac{1}{\nu_{34} - \nu_{14}} \right] \quad (7.13)$$

$$\delta \Delta \nu_{34} = \frac{b_{34}}{2\pi} \left[ -\frac{1}{\nu_{34} - \nu_{23}} - \frac{1}{-\nu_{34} - \nu_{14}} \right] \quad (7.14)$$

である [22]。上式を用いると

$$\delta\Delta\nu_{14} = -0.1 \text{ Hz} \quad (7.15)$$

$$\delta\Delta\nu_{34} = 0.1 \text{ Hz} \quad (7.16)$$

が得られる。以上に三者の評価式及びその結果をあげたが、非共鳴状態の影響を見積もるための評価式は全て異なっていることがわかる。そのため、今後は正しい評価式を求め、非共鳴状態の寄与を適切に評価することが MuSEUM 実験の課題であると考えている。

### 7.2.3 高磁場測定

J-PARC MLF の H Line の完成が目前に迫り、2022 年には世界初となる大強度パルスミュオンビームを用いた高磁場下のミュオニウム 1s 状態の超微細構造分光実験がいよいよ本格的に始動する。本研究は、モンテカルロシミュレーションを通して、MuSEUM 高磁場実験は、Conventional 法と Old Muonium 法のいずれの手法に関しても先行実験の 6 倍以上の精度が得られることを示している。目標である 10 倍の精度改善を実現するためには、系統的不確かさの抑制や非共鳴状態の評価が今後の課題になる。そして、本研究は、MuSEUM 高磁場実験の不確かさの評価に対して一つ重要な指針を与えるものであると考えている。

### 7.2.4 ラムゼー共鳴法の不確かさ

ラムゼー共鳴法 [20] は Old Muonium 法と同様に狭い線幅の観測を可能にする実験手法 [Appendix B] である。本研究のシミュレーション手法を応用すればラムゼー共鳴法の不確かさを見積もることができる。J-PARC の大強度パルスミュオンビーム H Line は、従来の MuHFS 測定がもつ統計的不確かさを、系統的な不確かさと同程度に改善できる。しかし、系統的な不確かさの抑制という新たな課題が生じたのも事実である。ラムゼー共鳴法の不確かさの評価はこのことに対する一つの重要な指針となるであろう。

## 参考文献

- [1] W. Liu, et al., Phys. Rev. Lett., 82, 711 (1999).
- [2] L. Essen, et al., Nature, 229, 110 (1971).
- [3] M. Eides, H. Grotch, and V. Shelyuto. Theory of light hydrogenic bound states. Springer tracts in modern physics. Springer, p. 251., 2007.
- [4] A. Ishida, et al., Phys. Lett. B 734, 338-344 (2014).
- [5] M. I. Eides, V. A. Shelyuto, Phys. Rev. D 89, 111301(R) (2014).
- [6] P. J. Mohr, D.B. Newell, B.N. Taylor, Rev. Mod. Phys. 88 (2016) 035009.
- [7] V. W. Hughes, et al., Phys. Rev. Lett., 5, 63 (1960).F. Bloch and A. Siegert,
- [8] F. Bloch and A. Siegert, Phys. Rev. 57, 522 (1940); J. H. Shirley, Phys. Rev. 138, B979 (1965).
- [9] B. Abi, et al., Phys. Rev. Lett. 126, 141801 (2021).
- [10] T. Aoyama, et al., Phys. Rep. 887, 1 (2020).
- [11] P. Zyla, et al.(Particle Data Group), Prog. Theor. Exp. Phys. 2020, 083C01 (2020).
- [12] H. Grotch, R. A. Hegstrom, Phys. Rev. A 4, 59 (1971).
- [13] R. Faustov, Phys. Lett. B 33, 422 (1970).
- [14] M. I. Eides, Phys. Lett. B 795, 113–116 (2019).
- [15] V. W. Hughes, et al., Phys. Rev. A 1, 3 (1973).
- [16] W. Happer, Rev. Mod. Phys. 44, 169 (1972).
- [17] Particle Data Group, Phys. Rev. D 54, 250 (1996).
- [18] J. M. Bailey, et al., Phys. Rev. A3 (1971) 871–884.
- [19] W. E. Cleland, et. al., Phys. Rev. A5 (1972) 2338–2356.
- [20] N. F. Ramsey, Rev. Mod. Phys. 62, 541 (1990).
- [21] D. Favart, et al., Phys. Rev. A 8, 1195 (1973).
- [22] Y. Ueno, Ph.D. Thesis, The University of Tokyo (2019).
- [23] D. E. Casperson, et al., Phys. Lett. B 59, 397 (1975).
- [24] W. Liu, Ph.D. thesis, Yale University (1997).
- [25] R. C. Weast, in CRC Handbook of Chemistry and Physics (CRC Press, Inc., Boca Raton,

- Florida, 1989), pp. D-188.
- [26] S. Ray, S. L. Kaufman, *Phys. Rev. Lett.*, 29, (1972).
- [27] S. Nishimura, Ph.D. Thesis, The University of Tokyo (2018).
- [28] K. Tanaka, Ph.D. Thesis, The University of Tokyo (2015).
- [29] S. Kanda, Ph.D. Thesis, The University of Tokyo (2017).
- [30] [http://www.ohtegiken.co.jp/wp/wp-content/uploads/rpm4\\_eng.pdf](http://www.ohtegiken.co.jp/wp/wp-content/uploads/rpm4_eng.pdf)
- [31] S. Seo, MuSEUM Technial Note.
- [32] <https://geant4.web.cern.ch/>
- [33] M. Abe, "MRI Magnet Shimming by Calculations of Iron Piece Placements with Truncated Singular Value Decomposition Regularization", *Magnetic Resonance in Medical Sciences*, Vol. 16, no.4, Oct. pp. 284-296, 2017.
- [34] M. Abe, et al., "Static Magnetic Field Shimming Calculation Using TSVD Regularization Considering Constraints of Iron Pieces Placements", *IEEE Transaction on Applied Superconductivity*, vol. 27, no. 7, Oct. 2017, Art. no. 4400812.
- [35] <https://root.cern.ch/doc/master/classTFile.html>
- [36] <https://root.cern.ch/doc/master/classTTree.html>
- [37] T. Albahri, et al., *Phys. Rev. A* 103, 042208 (2021).
- [38] F. Block and A. Siegert, *Phys. Rev.* 57, 522 (1940).
- [39] H. Salwen, *Phys. Rev.* 99, 1272 (1955).
- [40] H. Salwen, *Phys. Rev.* 101, 623 (1956).

## Appendix A 検出器の立体角

ミュオンの静止位置  $(x_\mu, y_\mu, z_\mu)$  から検出器  $(x_D, y_D, z_D)$  までの位置ベクトル  $\mathbf{P}'$  を、単位球面上に射影して得られる単位ベクトルを  $\mathbf{P}$  とすると、 $\mathbf{P}$  は次式となる (Fig.A.0.1)。

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{(x_\mu - x_D)^2 + (y_\mu - y_D)^2 + (z_\mu - z_D)^2}} \begin{pmatrix} x_\mu - x_D \\ y_\mu - y_D \\ z_\mu - z_D \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

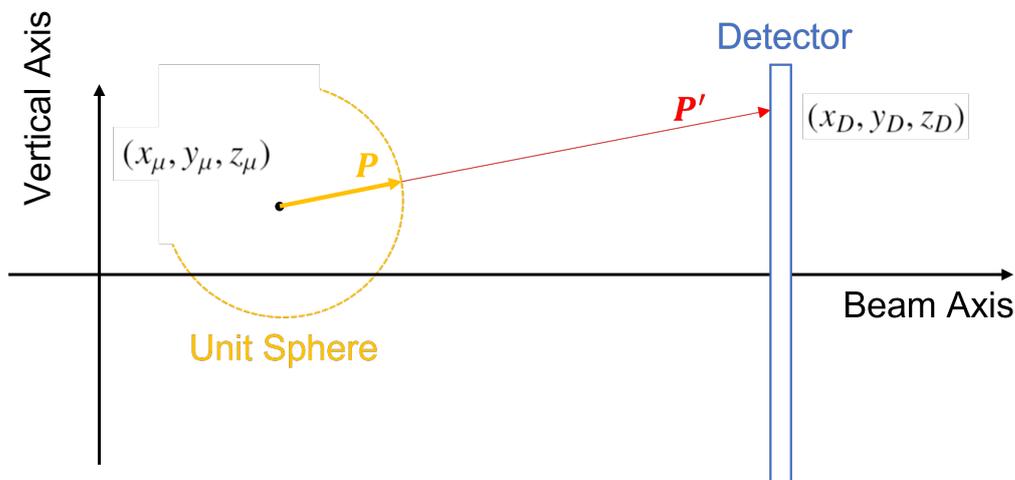


Fig.A.0.1 検出器上の位置を単位球面上に射影する。

検出器の立体角は、球面上につくられる微小な四角形  $|\partial\mathbf{P}/\partial x_D \times \partial\mathbf{P}/\partial y_D|$  の面積分として求まる (Fig:A.0.2)。

$$\begin{aligned} \Omega(x, y) &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \left| \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial x_D} \times \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial y_D} \right| dx_D dy_D \\ &= (z_\mu - z_D) \int_{-a}^a \int_{-a}^a \left( (x_\mu - x_D)^2 + (y_\mu - y_D)^2 + (z_\mu - z_D)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} dx_D dy_D \\ &= z' \int_{y_\mu - a}^{y_\mu + a} \int_{x_\mu - a}^{x_\mu + a} \left( x'^2 + y'^2 + z'^2 \right)^{-\frac{3}{2}} dx' dy' \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

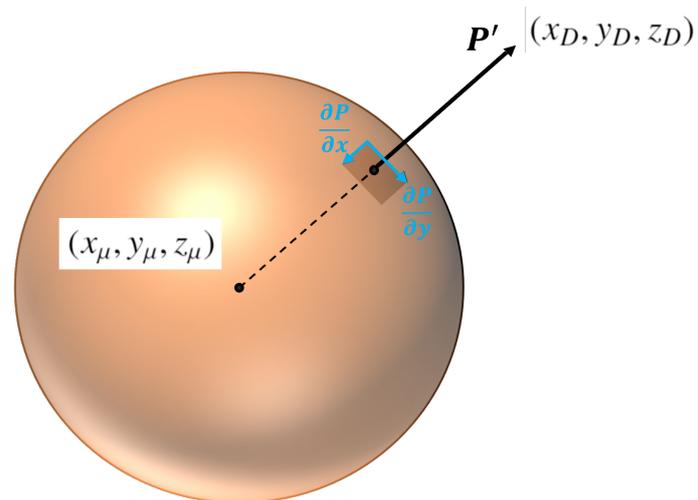


Fig.A.0.2 立体角積分は、検出器の位置を単位球上への射影によってできた四角形  $|\partial \mathbf{P} / \partial x_D \times \partial \mathbf{P} / \partial y_D|$  の面積分として求められる。

## Appendix B ラムゼー共鳴法

ラムゼー共鳴法 [20] は Conventional 法よりも狭い線幅が得られる実験手法である。先行実験 [21] の結果は以下である。

$$\nu_{\text{zero}} = 4.463\,304\,4(2.3)_{\text{stat.}} \text{ GHz (0.5 ppm)} \quad (\text{B.1})$$

ラムゼー共鳴法について説明する。まず、ミュオニウムに時間幅  $\tau$  をもつマイクロ波パルス照射する。マイクロ波とミュオニウムの相互作用によりミュオンのスピン偏極は  $\pi/2$  傾く。パルス間隔  $T$  後に再度同一のマイクロ波を時間幅  $\tau$  で照射する。このとき、二つのパルスの間には相関が必要で、位相が  $\pi$  になるように二つのパルスを調整しなければならない。  $t = T + 2\tau$  後、ミュオンのスピン分極は反転し、下流側に設置された陽電子検出器に検出される。この時、印加周波数を掃引しながら周波数ごとに变化する陽電子数の計数を観測する。

### B.1 ゼロ磁場測定

ゼロ磁場でのミュオニウムの状態振幅は

$$a_{-}(t+T) = e^{(-\gamma+i\Delta\omega)T/2} \left( a_{-}(t) \left[ \cos \frac{\Gamma T}{2} - i \frac{\Delta\omega}{\Gamma} \sin \frac{\Gamma T}{2} \right] + a_{4}(t) \left[ -i \frac{2b}{\Gamma} \sin \frac{\Gamma t}{2} \right] e^{i\Delta\omega t} \right) \quad (\text{B.2})$$

$$a_{4}(t+T) = e^{(-\gamma-i\Delta\omega)T/2} \left( a_{-}(t) \left[ -i \frac{2b}{\Gamma} \sin \frac{\Gamma t}{2} \right] e^{-i\Delta\omega t} + a_{4}(t) \left[ \cos \frac{\Gamma T}{2} + i \frac{\Delta\omega}{\Gamma} \sin \frac{\Gamma T}{2} \right] \right) \quad (\text{B.3})$$

式 (B.2), (B.3) は次式に変形できる。

$$a_{-}(t+T) = e^{(-\gamma+i\Delta\omega)T/2} \left( F(T)a_{-}(t) + G(T)a_{4}(t)e^{i\Delta\omega t} \right) \quad (\text{B.4})$$

$$a_{4}(t+T) = e^{(-\gamma-i\Delta\omega)T/2} \left( G(T)a_{-}(t)e^{-i\Delta\omega t} + F(T)^{*} a_{4}(t) \right) \quad (\text{B.5})$$

ここで、次式を用いた。

$$F(T) = \cos \frac{\Gamma T}{2} - i \frac{\Delta\omega}{\Gamma} \sin \frac{\Gamma T}{2}, \quad G(T) = -i \frac{2b}{\Gamma} \sin \frac{\Gamma T}{2} \quad (\text{B.6})$$

$$\Gamma = \sqrt{\Delta\omega^2 + 8|b|^2}$$

式 (B.4), (B.5) より、一度目のマイクロ波パルス (時間幅  $\tau$ ) を印加した場合は

$$a_-(\tau) = e^{(-\gamma+i\Delta\omega)\tau/2} \left( F(\tau)a_-(0) + G(\tau)a_4(0) \right) \quad (\text{B.7})$$

$$a_4(\tau) = e^{(-\gamma-i\Delta\omega)\tau/2} \left( G(\tau)a_-(0) + F(\tau)^*a_4(0) \right) \quad (\text{B.8})$$

セカンドマイクロ波パルスまでの時間発展は、 $b = 0$  を式 (B.4), (B.5) に代入して求められる。

$$a_-(T + \tau) = e^{-\gamma T/2} a_-(\tau) \quad (\text{B.9})$$

$$a_4(T + \tau) = e^{-\gamma T/2} a_4(\tau) \quad (\text{B.10})$$

セカンドマイクロ波パルスを印加すると

$$a_-(T + 2\tau) = e^{(-\gamma+i\Delta\omega)\tau/2} \left( F(\tau)a_-(T + \tau) + G(\tau)a_4(T + \tau)e^{i\Delta\omega(T+\tau)+i\varphi} \right) \quad (\text{B.11})$$

$$a_4(T + 2\tau) = e^{(-\gamma-i\Delta\omega)\tau/2} \left( G(\tau)a_-(T + \tau)e^{-i\Delta\omega(T+\tau)-i\varphi} + F(\tau)^*a_4(T + \tau) \right) \quad (\text{B.12})$$

非対角成分の  $e^{\pm i\varphi}$  はコヒーレンス項 (干渉項) を表す。

以上より、 $t = T + 2\tau$  後の状態振幅は

$$a_-(T + 2\tau) = \frac{e^{-\gamma(\tau+T/2)+i\Delta\omega\tau}}{2} \left( \left[ F(\tau)^2 + F(\tau)G(\tau) \right] + \left[ |G(\tau)|^2 + F(\tau)^*G(\tau) \right] e^{i(\Delta\omega T + \varphi)} \right) \quad (\text{B.13})$$

$$a_4(T + 2\tau) = \frac{e^{-\gamma(\tau+T/2)-i\Delta\omega\tau}}{2} \left( \left[ F(\tau)^{*2} + F(\tau)^*G(\tau) \right] + \left[ |G(\tau)|^2 + F(\tau)G(\tau) \right] e^{-i(\Delta\omega T + \varphi)} \right) \quad (\text{B.14})$$

ただし、以下の条件を用いた。

$$a_+(0) = a_-(0) = a_4(0) = \frac{1}{2}$$

## B.2 高磁場測定

高磁場測定は二準位系に帰着できるので状態 1-2 の遷移についてのみ考える。式 (2.48), (2.49) より状態 1, 2 の時間発展は

$$a_1(t + T) = e^{(-\gamma+i\Delta\omega)T/2} \left( a_1(t) \left[ \cos \frac{\Gamma T}{2} - i \frac{\Delta\omega}{\Gamma} \sin \frac{\Gamma T}{2} \right] + a_2(t) \left[ -i \frac{2b}{\Gamma} \sin \frac{\Gamma t}{2} \right] e^{i\Delta\omega t} \right) \quad (\text{B.15})$$

$$a_2(t + T) = e^{(-\gamma-i\Delta\omega)T/2} \left( a_1(t) \left[ -i \frac{2b}{\Gamma} \sin \frac{\Gamma t}{2} \right] e^{-i\Delta\omega t} + a_2(t) \left[ \cos \frac{\Gamma T}{2} + i \frac{\Delta\omega}{\Gamma} \sin \frac{\Gamma T}{2} \right] \right) \quad (\text{B.16})$$

である。式 (B.15),(B.16) は以下に変形できる。

$$a_1(t+T) = e^{(-\gamma+i\Delta\omega)T/2} \left( F(T)a_1(t) + G(T)a_2(t)e^{i\Delta\omega t} \right) \quad (\text{B.17})$$

$$a_2(t+T) = e^{(-\gamma-i\Delta\omega)T/2} \left( G(T)a_1(t)e^{-i\Delta\omega t} + F(T)^* a_2(t) \right) \quad (\text{B.18})$$

ただし、以下の等式を用いた。

$$F(T) = \cos \frac{\Gamma T}{2} - i \frac{\Delta\omega}{\Gamma} \sin \frac{\Gamma T}{2}, \quad G(T) = -i \frac{2b}{\Gamma} \sin \frac{\Gamma T}{2} \quad (\text{B.19})$$

$$\Gamma = \sqrt{\Delta\omega^2 + 4|b|^2}$$

一度目のマイクロ波パルス (時間幅  $\tau$ ) を印加した場合は

$$a_1(\tau) = e^{(-\gamma+i\Delta\omega)\tau/2} \left( F(\tau)a_1(0) + G(\tau)a_2(0) \right) \quad (\text{B.20})$$

$$a_2(\tau) = e^{(-\gamma-i\Delta\omega)\tau/2} \left( G(\tau)a_1(0) + F(\tau)^* a_2(0) \right) \quad (\text{B.21})$$

セカンドマイクロ波パルスまでの時間発展は、 $b = 0$  を式 (B.15), (B.16) に代入すればよい。

$$a_1(T+\tau) = e^{-\gamma T/2} a_1(\tau) \quad (\text{B.22})$$

$$a_2(T+\tau) = e^{-\gamma T/2} a_2(\tau) \quad (\text{B.23})$$

セカントマイクロ波パルスを印加すると

$$a_1(T+2\tau) = e^{(-\gamma+i\Delta\omega)\tau/2} \left( F(\tau)a_1(T+\tau) + G(\tau)a_2(T+\tau)e^{i\Delta\omega(T+\tau)+i\varphi} \right) \quad (\text{B.24})$$

$$a_2(T+2\tau) = e^{(-\gamma-i\Delta\omega)\tau/2} \left( G(\tau)a_1(T+\tau)e^{-i\Delta\omega(T+\tau)-i\varphi} + F(\tau)^* a_2(T+\tau) \right) \quad (\text{B.25})$$

非対角成分の  $e^{\pm i\varphi}$  はコヒーレンス項 (干渉項) を表す。

以上より、 $t = T + 2\tau$  後の状態振幅は

$$a_1(T+2\tau) = \left( F(\tau)^2 + |G(\tau)|^2 e^{i(\Delta\omega T + \varphi)} \right) e^{-\gamma(\tau+T/2)+i\Delta\omega\tau} \quad (\text{B.26})$$

$$a_2(T+2\tau) = \left( F(\tau)G(\tau)e^{-i(\Delta\omega T + \varphi)} + G(\tau)F(\tau)^* \right) e^{-\gamma(\tau+T/2)-i\Delta\omega\tau} \quad (\text{B.27})$$

と求まる。

### B.3 スピン偏極

ラムゼー共鳴法では、一度目のマイクロ波パルスでミュオンのスピン偏極を 0 にする必要がある。この要請から我々はマイクロ波パルスの条件式を求めることができる。 $t = \tau$  秒後のスピン偏極  $P_z(\tau)$  は

$$P_z(\tau) = a_1(\tau) - a_2(\tau) = e^{-\gamma\tau}(|F(\tau)|^2 - |G(\tau)|^2) \quad (\text{B.28})$$

ここで、以下の条件 ( $\pi/2$  パルス)

$$\Gamma\tau = \pi, \quad \Delta\omega = 2b \quad (\text{B.29})$$

を用いるとスピン偏極  $P_z(\tau) = 0$  が得られる。

# 謝辞

本研究を遂行し、修士論文を執筆するに上で、多くの方々からのご指導やご協力を賜りました。私は特定の方々に言及するようなことはいたしません、思うにそうせずとも、皆様に対する感謝の意は募るばかりであるからです。ただ私は、この狭苦しい末尾の一頁を借りて、修士の期間において、私を支え、私に関わった全ての方々に、松田研究室の皆様に、MuSEUMグループの皆様に感謝の念を表し、厚くお礼を申しあげ、謝辞とさせていただきます。